Exercices sur le raisonnement par récurrence

Pour des inéquations : on part du rang *n* et on construit le rang *n*+1

Exercice 1A.1 :

Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 6$, $2^n \geq (n+2)^2$

Exercice 1A.2 :

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $n! \geq 2^{n-1}$

Exercice 1A.3 :

Démontrer par récurrence que la suite définie par : $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$ est décroissante.

Exercice 1A.4 : Soit la suite (v_n) définie par : $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n + 2n + 3$

1. Etudier la monotonie de (v_n)
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n > n^2$

Exercice 1A.5 :

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2 + \dfrac{1}{u_n}$

Montrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $2 \leq u_n \leq 3$.

Exercice 1A.6:

En définissant pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ les suites $u_n = 3^n$ et $v_n = n^3$, montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 3$, $u_n \geq v_n$.

Exercice 1A.7 : Soit (v_n) la suite définie par : $v_0 \in [0;1]$ et $v_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+v_n}{2}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

a) Prouver par récurrence la propriété $\mathrm{P}_n : 0 \leq v_n \leq 1$
b) Prouver que (v_n) est croissante.
c) On pose $v_0 = \cos \Psi$ avec $\Psi \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, montrer par récurrence que $v_n = \cos\left(\dfrac{\Psi}{2^n}\right)$

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. Quet

Exercice 1A.1 :

Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 6$, $2^n \geq (n+2)^2$

Initialisation : $2^6 = 64$ et $(6+2)^2 = 64$: ok

Hérédité : supposons cette hypothèse vraie à un certain rang $n \geq 6$: $2^n \geq (n+2)^2$

→cela implique-t-il $2^{n+1} \geq ((n+1)+2)^2$?

Par hypothèse (en partant du rang *n*) :

$$2^n \geq (n+2)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \times 2^n \geq 2 \times (n+2)^2$$
$$\Leftrightarrow \quad 2^{n+1} \geq 2\left(n^2+4n+4\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad 2^{n+1} \geq 2n^2+8n+8$$

Il faut donc comparer $2n^2+8n+8$ et $((n+1)+2)^2$

$$2n^2+8n+8-((n+1)+2)^2 = 2n^2+8n+8-(n+3)^2 = 2n^2+8n+8-\left(n^2+6n+9\right)$$
$$= 2n^2+8n+8-n^2-6n-9 = n^2+2n-1$$

Etude du discriminant : $\Delta = 2^2 - 4 \times (-1) = 8$

→Les racines de ce polynôme sont : $n_1 = \dfrac{-2-2\sqrt{2}}{2} = -1-\sqrt{2}$ et $n_2 = \dfrac{-2+2\sqrt{2}}{2} = -1+\sqrt{2}$

→ $a = 1$ donc la parabole associée au polynôme est « orientée vers le haut »

→Sur l'intervalle $[6;+\infty[$, la différence étudiée est donc positive

Donc $2n^2+8n+8 > ((n+1)+2)^2$ et $\Leftrightarrow$ $2^{n+1} \geq 2n^2+8n+8 > ((n+1)+2)^2$

→l'hérédité est vérifiée

Conclusion : Par récurrence, on peut affirmer que pour tout entier $n \geq 6$, $2^n \geq (n+2)^2$

Exercice 1A.2 :

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$*, on a :* $n! \geq 2^{n-1}$

Initialisation : $1! = 1$ et $2^{1-1} = 2^0 = 1$ donc $1! \geq 2^{1-1}$: la propriété est initialisée

Hérédité : supposons qu'il existe un rang $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n! \geq 2^{n-1}$

→ceci implique-t-il que $(n+1)! \geq 2^n$?

Par hypothèse :

$$n! \geq 2^{n-1} \quad \Leftrightarrow \quad (n+1) \times n! \geq (n+1) \times 2^{n-1}$$

Il faut comparer $(n+1) \times 2^{n-1}$ et 2^n :

$$(n+1) \times 2^{n-1} - 2^n = (n+1) \times 2^{n-1} - 2 \times 2^{n-1} = (n-1) \times 2^{n-1}$$

→l'hérédité est vérifiée car $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $n-1 \geq 0$.

Conclusion : La propriété est initialisée et héréditaire : par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n! \geq 2^{n-1}$

Exercice 1A.3 :

Démontrer par récurrence que la suite définie par : $u_0 = 5$ *et* $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$ *est décroissante.*

Initialisation : $u_1 = \sqrt{2+u_0} = \sqrt{2+5} = \sqrt{7}$ donc $u_1 \le u_0$: ok

Hérédité : supposons qu'il existe un rang $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n+1} \le u_n$

→cela implique-t-il $u_{n+2} \le u_{n+1}$?

Par hypothèse :

$$u_{n+1} \le u_n \Leftrightarrow 2+u_{n+1} \le 2+u_n$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2+u_{n+1}} \le \sqrt{2+u_n}$$ car la fonction racine carrée est strictement croissante

$$\Leftrightarrow u_{n+2} \le u_{n+1}$$

→l'hérédité est vérifiée

Conclusion : Par récurrence, on peut affirmer que cette suite ainsi définie est décroissante.

Exercice 1A.4 : *Soit la suite* (v_n) *définie par :* $v_0 = 1$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n + 2n + 3$

1. *Etudier la monotonie de* (v_n) *:*

$v_{n+1} - v_n = 2n+3$ or $n \in \mathbb{N}$ donc $v_{n+1} - v_n > 0$ et la suite (v_n) est croissante.

2. *Montrer par récurrence que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *:* $v_n > n^2$ *:*

Initialisation : $v_0 = 1$ donc $v_0 > 0^2$: ok

Hérédité : supposons qu'il existe un rang $n \in \mathbb{N}$ tel que $v_n > n^2$

→cela implique-t-il $v_{n+1} > (n+1)^2$?

Par hypothèse :

$$v_n > n^2 \Leftrightarrow v_n + 2n + 3 > n^2 + 2n + 3$$

$$\Leftrightarrow v_n + 2n + 3 > \left(n^2 + 2n + 1\right) + 2$$

$$\Leftrightarrow v_{n+1} > (n+1)^2 + 2 > (n+1)^2$$

→l'hérédité est vérifiée

Conclusion : Par récurrence, on peut affirmer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n > n^2$

Exercice 1A.5 : *On considère la suite* (u_n) *définie par :* $u_0 = 3$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2 + \frac{1}{u_n}$

Montrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $2 \le u_n \le 3$

Initialisation : $u_0 = 3$ donc $2 \le u_0 \le 3$: la propriété est initialisée

Hérédité : supposons qu'il existe un rang $n \in \mathbb{N}$ tel que $2 \le u_n \le 3$

→ceci implique-t-il que $2 \le u_{n+1} \le 3$?

Par hypothèse :

$$2 \le u_n \le 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \ge \frac{1}{u_n} \ge \frac{1}{3}$$ la fonction inverse étant décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$

$$\Leftrightarrow 2 + \frac{1}{2} \ge 2 + \frac{1}{u_n} \ge 2 + \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad 3 \geq \frac{5}{2} \geq u_{n+1} \geq \frac{7}{3} \geq 2$$

Conclusion : La propriété est initialisée et héréditaire : par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $2 \leq u_n \leq 3$

Exercice 1A.6 :

En définissant pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ les suites $u_n = 3^n$ et $v_n = n^3$, montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 3$, $u_n \geq v_n$.

Initialisation : pour $n = 3$: $u_3 = 3^3 = 27$ et $v_3 = 3^3$ donc $u_3 \geq v_3$: la propriété est initialisée

Hérédité : supposons qu'il existe un entier $n \geq 3$ tel que $u_n \geq v_n \Leftrightarrow 3^n \geq n^3$

→ceci implique-t-il que $u_{n+1} \geq v_{n+1} \Leftrightarrow 3^{n+1} \geq (n+1)^3$?

Par hypothèse :

$$u_n \geq v_n \Leftrightarrow 3^n \geq n^3 \Leftrightarrow 3 \times 3^n \geq 3 \times n^3 \Leftrightarrow 3^{n+1} \geq 3 \times n^3$$

Or : $\quad 3 \times n^3 - (n+1)^3 = 3n^3 - (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) = 2n^3 - 3n^2 - 3n - 1$

On peut étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x - 1$.

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 3$$

→ $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 6 \times (-3) = 36 + 72 = 108$: deux racines réelles

$$x_1 = \frac{6 - \sqrt{108}}{2 \times 6} = \frac{6 - 6\sqrt{3}}{12} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{6 + \sqrt{108}}{2 \times 6} = \frac{6 + 6\sqrt{3}}{12} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

$a = 2$ donc la parabole est orientée vers le haut :

→si $x > \frac{1+\sqrt{3}}{2}$: la fonction f est positive.

Ainsi, pour tout entier $n \geq 3$:

$$2n^3 - 3n^2 - 3n - 1 > 0 \Leftrightarrow 3 \times n^3 - (n+1)^3 > 0 \Leftrightarrow 3 \times n^3 > (n+1)^3.$$

On conclue :

$$3^{n+1} \geq 3 \times n^3 > (n+1)^3 \quad \text{→l'hérédité est vérifiée.}$$

Par récurrence, $\forall n \geq 3$, $3^n \geq n^3$.

Exercice 1A.7 :

Soit (v_n) la suite définie par : $v_0 \in [0;1]$ et $v_{n+1} = \sqrt{\frac{1+v_n}{2}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

a) *Prouver par récurrence la propriété* $\mathrm{P}_n : 0 \leq v_n \leq 1$

Initialisation : $v_0 \in [0;1]$ donc la propriété est initialisée

Hérédité : supposons qu'il existe un rang $n \in \mathbb{N}$ tel que : $0 \leq v_n \leq 1$

→ceci implique-t-il que $0 \leq v_{n+1} \leq 1$?

Par hypothèse : $\quad 0 \leq v_n \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq 1 + v_n \leq 2$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1+v_n}{2} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sqrt{\frac{1+v_n}{2}} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq v_{n+1} \leq 1$$

La propriété est initialisée et héréditaire : par récurrence : $v_{n+1} = \sqrt{\frac{1+v_n}{2}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

b) Prouver que (v_n) est croissante :

Etudions la différence entre v_n et v_{n+1} :

$$v_{n+1}^2 - v_n^2 = \frac{1+v_n}{2} - v_n^2 = \frac{-2v_n^2 + v_n + 1}{2}$$

Etude du numérateur : $\Delta = 1^2 - 4\times(-2) = 9$

Les racines de ce polynôme sont : $v_{n_1} = \frac{-1-3}{2\times(-2)} = 1$ et $v_{n_2} = \frac{-1+3}{2\times(-2)} = -\frac{1}{2}$

Sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2};1\right]$, la différence étudiée est donc positive

Donc $v_{n+1}^2 \geq v_n^2$ soit $v_{n+1} \geq v_n$: (v_n) est croissante

c) On pose $v_0 = \cos\Psi$ avec $\Psi \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, montrer par récurrence que $v_n = \cos\left(\frac{\Psi}{2^n}\right)$

Initialisation : $v_0 = \cos\Psi = \cos\left(\frac{\Psi}{2^0}\right)$ et $v_1 = \sqrt{\frac{1+\cos\Psi}{2}} = \sqrt{\cos^2\left(\frac{\Psi}{2}\right)} = \cos\left(\frac{\Psi}{2^1}\right)$

Hérédité : supposons la propriété vraie à un certain rang n : $v_n = \cos\left(\frac{\Psi}{2^n}\right)$

→montrons qu'elle est vraie au rang (n+1) et que nous avons : $v_{n+1} = \cos\left(\frac{\Psi}{2^{n+1}}\right)$

$$v_{n+1} = \sqrt{\frac{1+v_n}{2}} = \sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{\Psi}{2^n}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1+\cos\left(2\times\frac{\Psi}{2^{n+1}}\right)}{2}} = \sqrt{\cos^2\left(\frac{\Psi}{2^{n+1}}\right)} = \cos\left(\frac{\Psi}{2^{n+1}}\right)$$

La propriété est initialisée et héréditaire : par récurrence, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \cos\left(\frac{\Psi}{2^n}\right)$