Exercices sur le raisonnement par récurrence

Exercice 1B.1 : Montrer, pour tout entier naturel *n*, que :

1) 4^n+5 est un multiple de 3
2) 7^n-1 est un multiple de 6
3) $10^n-(-1)^n$ est un multiple de 11
4) Si $n\geq 1$: n^3+2n est un multiple de 3
5) $3^{2n}-1$ est un multiple de 8
6) $10^{2n}-1$ est un multiple de 3.
7) $3^{6n+2}-2$ est divisible par 7
8) $2^{n+4}+3^{3n+2}$ est divisible par 5.
9) $3^{2n+1}+2^{n+2}$ est un multiple de 7

Exercice 1B.2 : Prouver par récurrence que, $\forall n\in\mathbb{N}$, n^2+n+2 est un nombre pair.

Exercice 1B.3 : Prouver par récurrence que, $\forall n\in\mathbb{N}$, 4^n+6n-1 est divisible par 9.

Exercice 1B.4 : Démontrer que si l'entier $\left(n^2-1\right)$ n'est pas divisible par 8, alors l'entier *n* est pair.

Exercice 1B.5 : Montrer que, $\forall n\in\mathbb{N}$, $5n^3+n$ est divisible par 6.

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. Quet

Exercice 1B.1 : Montrer, pour tout entier naturel *n*, que :

1) 4^n+5 est un multiple de 3

Initialisation : $4^0+5=1+5=6$ donc la propriété est initialisée

Hérédité : supposons qu'il existe un rang $n\in\mathbb{N}$ tel que 4^n+5 est un multiple de 3

→ceci implique-t-il que $4^{n+1}+5$ est un multiple de 3?

$$4^{n+1}+5=4\times4^n+5=4\times\left(4^n+5\right)-4\times5+5=4\times\left(4^n+5\right)-15$$

Par hypothèse, la première parenthèse est un multiple de 3, de même pour 15.

La propriété est initialisée et héréditaire : par récurrence, $\forall n\in\mathbb{N}$, 4^n+5 est un multiple de 3

2) 7^n-1 est un multiple de 6

Initialisation : $7^0-1=1-1=0$ donc la propriété est initialisée

Hérédité : supposons qu'il existe un rang $n\in\mathbb{N}$ tel que $7^n-1=6k$, $k\in\mathbb{Z}$.

→ceci implique-t-il que $7^{n+1}-1=6k'$, $k'\in\mathbb{Z}$?

En partant du rang *n* :

Par hypothèse : $7^n-1=6k \Leftrightarrow 7\times\left(7^n-1\right)=7\times6k \Leftrightarrow 7^{n+1}-7=6\times7k$

$$\Leftrightarrow 7^{n+1}-1-6=6\times7k \Leftrightarrow 7^{n+1}-1=6\times7k+6 \Leftrightarrow 7^{n+1}-1=6\times\left(7k+1\right)$$

En partant du rang *n*+1 :

$$7^{n+1}-1=7\times7^n-1=7\times7^n-7+6=7\times\left(7^n-1\right)+6$$

Or par hypothèse : $7^n-1=6k$

Donc $7^{n+1}-1=7\times6k+6=6\times7k+6\times1=6\times\left(7k+1\right)$

$\left(7k+1\right)\in\mathbb{Z}$ donc $7^{n+1}-1$ est un multiple de 6.

Par hypothèse, la première parenthèse est un multiple de 3, de même pour 15.

La propriété est initialisée et héréditaire : par récurrence, $\forall n\in\mathbb{N}$, 7^n-1 est un multiple de 6

3) $10^n-\left(-1\right)^n$ est un multiple de 11

Initialisation : $10^0-\left(-1\right)^0=1-1=0$ donc la propriété est initialisée

Hérédité : supposons qu'il existe un rang $n\in\mathbb{N}$ tel que $10^n-\left(-1\right)^n=11k$, $k\in\mathbb{Z}$.

→ceci implique-t-il que $10^{n+1}-\left(-1\right)^{n+1}=11k'$, $k'\in\mathbb{Z}$?

En partant du rang *n* :

$10^n-\left(-1\right)^n=11k \Leftrightarrow 10\times\left[10^n-\left(-1\right)^n\right]=10\times11k \Leftrightarrow 10^{n+1}-10\times\left(-1\right)^n=11\times10k$

Si n est pair : $-10\times\left(-1\right)^n=-10=-11+1=-11-\left(-1\right)^{n+1}$

Si n est impair : $-10\times\left(-1\right)^n=10=11-1=11-\left(-1\right)^{n+1}$

Si n est pair :

$$10^n-\left(-1\right)^n=11k \Leftrightarrow 10^{n+1}-11-\left(-1\right)^{n+1}=11\times10k \Leftrightarrow 10^{n+1}-\left(-1\right)^{n+1}=11\times10k+11$$

Si n est impair :

$$10^n-\left(-1\right)^n=11k \Leftrightarrow 10^{n+1}+11-\left(-1\right)^{n+1}=11\times10k \Leftrightarrow 10^{n+1}-\left(-1\right)^{n+1}=11\times10k-11$$

L'hérédité est vérifiée.

La propriété est initialisée et héréditaire, par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$10^n - (-1)^n$ est un multiple de 11

4) Si $n \geq 1$: $n^3 + 2n$ est un multiple de 3

Initialisation : $1^3 + 2\times 1 = 1 + 2 = 3$ donc la propriété est initialisée

Hérédité : supposons qu'il existe un rang $n \geq 1$ tel que $n^3 + 2n$ est un multiple de 3

→ceci implique-t-il que $(n+1)^3 + 2(n+1)$ est un multiple de 3 ?

$$(n+1)^3 + 2(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2 = \left(n^3 + 2n\right) + 3n^2 + 3n + 3$$
$$= \left(n^3 + 2n\right) + 3\left(n^2 + n + 1\right)$$

Par hypothèse, la première parenthèse est un multiple de 3, de même pour $3\left(n^2 + n + 1\right)$.

La propriété est initialisée et héréditaire : par récurrence, $n \geq 1$, $n^3 + 2n$ est un multiple de 3

5) $3^{2n} - 1$ est un multiple de 8

Initialisation : $3^{2\times 0} - 1 = 3^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ donc la propriété est initialisée

Hérédité : supposons qu'il existe un rang $n \in \mathbb{N}$ tel que $3^{2n} - 1$ est un multiple de 8

→ceci implique-t-il que $3^{2(n+1)} - 1$ est un multiple de 8?

$$3^{2(n+1)} - 1 = 3^{2n+2} - 1 = 3^2 \times 3^{2n} - 1 = 3^2 \times \left(3^{2n} - 1\right) + 3^2 - 1 = 3^2 \times \left(3^{2n} - 1\right) + 8$$

Par hypothèse, la première parenthèse est un multiple de 8, de même pour 8.

La propriété est initialisée et héréditaire : par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $3^{2n} - 1$ est un multiple de 8

6) $10^{2n} - 1$ est un multiple de 3.

Initialisation :

Pour $n = 0$: $10^{2\times 0} - 1 = 1 - 1 = 0$ et 0 est un multiple de 3 : l'initialisation est vérifiée.

Hérédité : supposons qu'il existe un entier naturel n tel que $10^{2n} - 1 = 3k$, $k \in \mathbb{Z}$.

→ceci implique-t-il que $10^{2(n+1)} - 1 = 3k'$, $k' \in \mathbb{Z}$?

Par hypothèse : $10^{2n} - 1 = 3k \iff 10^2 \times \left(10^{2n} - 1\right) = 10^2 \times 3k \iff 10^{2n+2} - 10^2 = 300k$

$$\iff 10^{2n+2} - 1 - 99 = 300k \iff 10^{2n+2} - 1 = 300k + 99 \iff 10^{2n+2} - 1 = 3(100k + 33)$$

Or $k \in \mathbb{Z}$ donc $100k + 33 \in \mathbb{Z}$ et $10^{2n+2} - 1$ est un multiple de 3.

OU

$$10^{2(n+1)} - 1 = 10^{2n+2} - 1 = 100 \times 10^{2n} - 1 = 100 \times 10^{2n} - 100 + 99 = 100\left(10^{2n} - 1\right) + 99$$

Or par hypothèse $10^{2n} - 1$ est un multiple de 3 et 99 est un multiple de 3.

Donc $10^{2n+2} - 1$ est un multiple de 3.

Et l'hérédité est vérifiée.

Par récurrence, pour tout entier naturel n, $10^{2n} - 1$ est un multiple de 3.

7) $3^{6n+2}-2$ est divisible par 7

Initialisation : $3^{6\times 0+2}-2=9-2=7$ donc la propriété est initialisée

Hérédité : supposons qu'il existe un rang $n\in\mathbb{N}$ tel que $3^{6n+2}-2$ est divisible par 7

→ceci implique-t-il que $3^{6(n+1)+2}-2$ est divisible par 7 ?

$$3^{6(n+1)+2}-2=3^{6n+2}\times 3^6-2=3^{6n+2}\times 3^6-2\times 3^6+2\times 3^6-2=\left(3^{6n+2}-2\right)\times 3^6+1456$$

$$3^{6(n+1)+2}-2=\left(3^{6n+2}-2\right)\times 3^6+7\times 208$$

Par hypothèse, la première parenthèse est un multiple de 7, de même pour 1456.

La propriété est initialisée et héréditaire : par récurrence, $\forall n\in\mathbb{N}$, $3^{6n+2}-2$ est divisible par 7

8) $2^{n+4}+3^{3n+2}$ est divisible par 5.

Initialisation : $2^{0+4}+3^{3\times 0+2}=2^4+3^2=16+9=25$ donc la propriété est initialisée

Hérédité : supposons qu'il existe un rang $n\in\mathbb{N}$ tel que $2^{n+4}+3^{3n+2}$ est divisible par 5.

→ceci implique-t-il que $2^{(n+1)+4}+3^{3(n+1)+2}=2^{n+5}+3^{3n+5}$ est divisible par 5 ?

$$2^{(n+1)+4}+3^{3(n+1)+2}=2^{n+5}+3^{3n+5}=2\times 2^{n+4}+3^3\times 3^{3n+2}$$

$$2^{(n+1)+4}+3^{3(n+1)+2}=2\times 2^{n+4}+2\times 3^{3n+2}+\left(3^3-2\right)\times 3^{3n+2}$$

$$2^{(n+1)+4}+3^{3(n+1)+2}=2\times\left(2^{n+4}+3^{3n+2}\right)+25\times 3^{3n+2}$$

Par hypothèse, la première parenthèse est un multiple de 5, de même pour 25.

La propriété est initialisée et héréditaire, par récurrence, $\forall n\in\mathbb{N}$, $2^{n+4}+3^{3n+2}$ est divisible par 5

9) $3^{2n+1}+2^{n+2}$ est un multiple de 7

Initialisation : $3^{2\times 0+1}+2^{0+2}=3^1+2^2=3+4=7$ donc la propriété est initialisée

Hérédité : supposons qu'il existe un rang $n\in\mathbb{N}$ tel que $3^{2n+1}+2^{n+2}$ est un multiple de 7

→ceci implique-t-il que $3^{2n+1}+2^{n+2}$ est un multiple de 7 ?

$$\begin{aligned}3^{2(n+1)+1}+2^{(n+1)+2}&=3^{2n+3}+2^{n+3}=3^2\times 3^{2n+1}+2\times 2^{n+2}\\&=3^2\times\left(3^{2n+1}+2^{n+2}\right)-3^2\times 2^{n+2}+2\times 2^{n+2}\\&=9\left(3^{2n+1}+2^{n+2}\right)-7\times 2^{n+2}\end{aligned}$$

Par hypothèse, la première parenthèse est un multiple de 7, de même pour $7\times 2^{n+2}$.
La propriété est initialisée et héréditaire :

Par récurrence, $\forall n\in\mathbb{N}, 3^{2n+1}+2^{n+2}$ est un multiple de 7

<u>**Exercice 1B.2 :**</u> Prouver par récurrence que, $\forall n\in\mathbb{N}$, n^2+n+2 est un nombre pair.

Initialisation : Au rang 0 : $0^2+0+2=2$ et 2 est pair

Hérédité : supposons la propriété vraie au rang n : n^2+n+2 est un nombre pair.

→montrons qu'elle est vraie au rang (n+1) et que $(n+1)^2+(n+1)+2$ est un nombre pair.

$$(n+1)^2+(n+1)+2=n^2+2n+1+n+1+2=n^2+3n+4=n^2+n+2+2n+2=\left(n^2+n+2\right)+2(n+1)$$

La 1ère parenthèse est paire par hypothèse, de même pour le facteur 2 intervenant dans le 2è produit
Donc l'hérédité est vérifiée.

Par récurrence, $\forall n\in\mathbb{N},\ n^2+n+2$ est un nombre pair.

Exercice 1B.3 : Prouver par récurrence que, $\forall n\in\mathbb{N},\ 4^n+6n-1$ est divisible par 9.

Initialisation : $4^0+6\times 0-1=0$ est bien divisible par 9
Hérédité : supposons qu'il existe un rang $n\in\mathbb{N}$ tel que 4^n+6n-1 est divisible par 9.

→cela implique-t-il $4^{n+1}+6(n+1)-1$ est divisible par 9 ?

$$4^{n+1}+6(n+1)-1=4\times 4^n+6n+5=4\left(4^n+\frac{3}{2}n+\frac{5}{4}\right)=4\left(4^n+\frac{12}{2}n-\frac{9}{2}n-\frac{4}{4}+\frac{9}{4}\right)$$

$$=4\left(4^n+6n-1-\frac{9}{2}n+\frac{9}{4}\right)=4\left(4^n+6n-1\right)-18n+9=4\left(4^n+6n-1\right)-9(2n-1)$$

→l'hérédité est vérifiée
Par récurrence, on peut affirmer que $\forall n\in\mathbb{N},\ 4^n+6n-1$ est divisible par 9.

Exercice 1B.4 :

Démontrer que si l'entier $\left(n^2-1\right)$ n'est pas divisible par 8, alors l'entier n est pair, $n \geq 1$.

Initialisation : $1^2-1=1-1=0$ et $2^2-1=4-1=3$ donc l'initialisation est vérifiée.

Hérédité pour des nombres impairs (cette hérédité n'est pas demandée mais son étude est intéressante) : supposons qu'il existe un rang impair $n \geq 1$ tel que $n^2-1=8k$, $k \in \mathbb{N}$

→ceci implique-t-il que $(n+2)^2-1=8k'$, $k' \in \mathbb{N}$?

En partant du rang $n + 2$:

$$(n+2)^2-1=n^2+4n+4-1=n^2+4n+3=n^2-1+4n+4=n^2-1+4(n+1)$$

Par hypothèse, $n^2-1=8k$, $k \in \mathbb{N}$ et si n est impair alors $(n+1)$ est pair donc $4(n+1)$ est un multiple de 8.

L'hérédité est vérifiée.

Par récurrence, pour tout entier impair $n \geq 1$, l'entier $\left(n^2-1\right)$ est divisible par 8.

Tous les entiers impairs mènent à $\left(n^2-1\right)$ est divisible par 8.

Si on pose pour des entiers pairs :

$$n=2k \text{ , } k \in \mathbb{N}$$

Ainsi : $n^2-1=(2k)^2-1=4\times k^2-1$

Or $k \in \mathbb{N}$ donc $4\times k^2$ est pair et $4\times k^2-1$ est impair et ne peut être divisible par 8.

Exercice 1B.5 : *Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $5n^3+n$ est divisible par 6.*

Initialisation : $5\times 0^3+0=0$ donc la propriété est initialisée

Hérédité : supposons qu'il existe un rang $n \in \mathbb{N}$ tel que $5n^3+n$ est un multiple de 6

→ceci implique-t-il que $5(n+1)^3+(n+1)$ est un multiple de 6 ?

$$\begin{aligned}5(n+1)^3+(n+1) &= 5\left(n^3+3n^2+3n+1\right)+n+1\\ &=5n^3+15n^2+15n+5+n+1\\ &=\left(5n^3+n\right)+\left(15n^2+15n+6\right)\\ &=\left(5n^3+n\right)+3\left(5n^2+5n+2\right)\\ &=\left(5n^3+n\right)+3\left[5\left(n^2+n\right)+2\right]\\ &=\left(5n^3+n\right)+3\left[5n(n+1)+2\right]\end{aligned}$$

Le produit $n(n+1)$ est pair donc $5n(n+1)+2$ est pair et :

$3\left[5n(n+1)+2\right]$ est un multiple de 6, de même pour $5n^3+n$ par hypothèse.

La propriété est initialisée et héréditaire : par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $5n^3+n$ est un multiple de 6.