Exercices sur le raisonnement par récurrence

Exercice 1C.1 :
On considère la suite (u_n) définie par : $u_0=0$, $u_1=1$ et pour tout entier $n\geq 1$, $u_{n+1}=4u_n-3u_{n-1}$.

Démontrer que pour tout entier naturel $n\geq 1$, on a : $u_n=\dfrac{3^n-1}{2}$.

Exercice 1C.2 : Soit (u_n) une suite définie par $u_0=2$ et $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{1+u_n}$.

Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\dfrac{2}{2n+1}$.

Exercice 1C.3 : Soit la suite (u_n) définie par : $u_1=1$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{1+u_n}$

a) Calculer les premiers termes de la suite.
b) Conjecturer une expression pour le terme général u_n
c) Prouver cette conjecture par récurrence.

Exercice 1C.4 : Soit (u_n) une suite définie par $u_0=3$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}=2u_n-1$.

Démontrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=2^{n+1}+1$.

Exercice 1C.5 : Soit la suite (S_n) définie par : $\forall n\geq 1$: $S_n=1+3+5+...+(2n-1)$

1. Calculer les 4 premiers termes de la suite et conjecturer une expression de (S_n) en fonction de *n*.
2. Démontrer cette conjecture à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

Exercice 1C.6 : Démontrer que : $\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p(p+1)}=\frac{n}{n+1}$

Exercice 1C.7 : On donne une suite définie par : $u_0=13$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\dfrac{1}{5}u_n+\dfrac{4}{5}$

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel *n*, $u_n=1+\dfrac{12}{5^n}$

Exercice 1C.8 : Montrer par récurrence que $\displaystyle\sum_{p=1}^{n}p(p+1)(p+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

Exercice 1C.9 : On considère la suite (v_n) définie par : $v_0=2$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1}=3v_n+n+1$

Démontrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_n=\dfrac{11}{4}\times 3^n-\dfrac{3}{4}-\dfrac{n}{2}$

Exercice 1C.10 : On considère la suite (u_n) définie par : $u_0=\dfrac{1}{4}$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=5u_n-1$

Après avoir calculé les premiers termes de la suite, émettre une conjecture sur l'expression de (u_n) puis la démontrer par récurrence.

Exercice 1C.11 : On donne une suite définie par : $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 2n + 5$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2 + 4n + 2$.

Exercice 1C.12 : On donne une suite définie par : $u_0 = -2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 6 - \frac{8}{2^n}$.

Exercice 1C.13 : On donne une suite définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{25}{4} \times \frac{1}{3^n} + \frac{3n}{2} - \frac{21}{4}$.

Exercice 1C.14 : Montrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a^n - b^n = (a-b) \sum_{p=0}^{n-1} a^{(n-1-p)} b^p$

Exercice 1C.15 : On considère la suite (u_n) définie par : $u_2 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+2} = -3u_{n+1} - 2u_n$

Démontrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_2 = u_1 = 1$ et $u_n = (-2)^n - 3(-1)^n$

Exercice 1C.16 : On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = 3 \\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$.

Démontrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3 \times 2^n - 3^n$

Exercice 1C.17 : On considère la suite (u_n) définie par : $u_1 = u_0 = 1$ et $\forall n \geq 2$, $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$

Cette suite est appelée suite de FIBONACCI.

On pose $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$: ce nombre est appelé le nombre d'or.

1) Vérifier que $\varphi^2 = \varphi + 1$
2) En déduire alors une expression de φ^3, φ^4 et φ^5 de la forme $a\varphi + b$, avec a et b deux entiers.
3) Déduire des deux questions précédentes une expression de φ^n sous la forme $a\varphi + b$
4) Démontrer alors cette conjecture avec un entier naturel quelconque n.

Aide : Calculer les premiers termes de la suite de FIBONACCI puis ouvrir les yeux…

Exercice 1C.18 : On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{u_n^{\ 2} + 1}} \end{cases}$.

Démontrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

Exercice 1C.19 : Démontrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$

Exercice 1C.1 :

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0=0$, $u_1=1$ et pour tout entier $n\geq 1$, $u_{n+1}=4u_n-3u_{n-1}$.

Démontrer que pour tout entier naturel $n\geq 1$, on a : $u_n=\dfrac{3^n-1}{2}$.

Initialisation : $\dfrac{3^1-1}{2}=\dfrac{3-1}{2}=\dfrac{2}{2}=1=u_1$

$u_2=u_{1+1}=4u_1-3u_{1-1}=4\times1-3\times0=4$ or $\dfrac{3^2-1}{2}=\dfrac{9-1}{2}=\dfrac{8}{2}=4=u_2$

L'initialisation est vérifiée pour les deux premiers termes de rang $n\geq 1$.

Hérédité : supposons qu'il existe un rang $n\geq 1$ tel que $u_n=\dfrac{3^n-1}{2}$ et $u_{n-1}=\dfrac{3^{n-1}-1}{2}$

→ceci implique-t-il que $u_{n+1}=\dfrac{3^{n+1}-1}{2}$?

Par hypothèse : $u_{n+1}=4u_n-3u_{n-1}=4\times\dfrac{3^n-1}{2}-3\times\dfrac{3^{n-1}-1}{2}=2\times3^n-2-3\times\dfrac{3^{n-1}}{2}+\dfrac{3}{2}$

$=2\times3^n-\dfrac{3^n}{2}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}\times3^n-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\left(3\times3^n-1\right)=\dfrac{1}{2}\left(3^{n+1}-1\right)$: hérédité vérifiée

Par récurrence, pour tout entier naturel $n\geq 1$, on a : $u_n=\dfrac{3^n-1}{2}$.

Exercice 1C.2 :

Soit (u_n) une suite définie par $u_0=2$ et $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{1+u_n}$. Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\dfrac{2}{2n+1}$.

Initialisation : $\dfrac{2}{2\times0+1}=2$ donc $u_0=\dfrac{2}{2\times0+1}$: l'initialisation est vérifiée.

Hérédité : supposons qu'il existe un rang $n\geq 0$ tel que $u_n=\dfrac{2}{2n+1}$

→ceci implique-t-il que $u_{n+1}=\dfrac{2}{2(n+1)+1}=\dfrac{2}{2n+3}$?

Il est plus naturel de partir du rang $n+1$, avec par définition de la suite :

$$u_{n+1}=\frac{u_n}{1+u_n}=\frac{\frac{2}{2n+1}}{1+\frac{2}{2n+1}}=\frac{\frac{2}{2n+1}}{\frac{2n+1}{2n+1}+\frac{2}{2n+1}}=\frac{\frac{2}{2n+1}}{\frac{2n+3}{2n+1}}=\frac{2}{2n+1}\times\frac{2n+1}{2n+3}=\frac{2}{2n+3}.$$

L'hérédité est vérifiée.

Par récurrence, pour tout entier naturel $n\geq 0$, on a : $u_n=\dfrac{2}{2n+1}$.

Exercice 1C.3 : *Soit la suite (u_n) définie par : $u_1=1$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{1+u_n}$*

a) *Calculer les premiers termes de la suite :*

$$u_2=\frac{u_1}{1+u_1}=\frac{1}{2}\quad ;\quad u_3=\frac{u_2}{1+u_2}=\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}\quad ;\quad u_4=\frac{u_3}{1+u_3}=\frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}}=\frac{1}{4}$$

b) Il semble que $u_n=\frac{1}{n}$

c) *Prouver cette conjecture par récurrence :*

L'initialisation est déjà vérifiée

Hérédité : supposons qu'il existe un rang $n\in\mathbb{N}$ tel que $u_n=\frac{1}{n}$

→cela implique-t-il $u_{n+1}=\frac{1}{n+1}$?

$$u_{n+1}=\frac{u_n}{1+u_n}=\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}=\frac{\frac{1}{n}}{\frac{n+1}{n}}=\frac{1}{n}\times\frac{n}{n+1}=\frac{1}{n+1}$$: l'hérédité est vérifiée

Par récurrence, on peut affirmer que pour tout n, $u_n=\frac{1}{n}$.

Exercice 1C.4 :

Soit (u_n) une suite définie par $u_0=3$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}=2u_n-1$.

Démontrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=2^{n+1}+1$.

Initialisation : $2^{0+1}+1=2+1=3=u_0$: l'initialisation est vérifiée.

Hérédité : supposons qu'il existe un rang $n\geq 0$ tel que $u_n=2^{n+1}+1$

→ceci implique-t-il que $u_{n+1}=2^{(n+1)+1}+1$ soit $u_{n+1}=2^{n+2}+1$?

En partant du rang *n* :

Par hypothèse : $u_n=2^{n+1}+1 \;\Leftrightarrow\; 2u_n=2\times\left(2^{n+1}+1\right) \;\Leftrightarrow\; 2u_n=2^{n+2}+2 \;\Leftrightarrow\; 2u_n-1=2^{n+2}+2-1$

$\Leftrightarrow\; u_{n+1}=2^{n+2}+1$.

En partant du rang *n*+1 :

$$u_{n+1}=2u_n-1=2\left(2^{n+1}+1\right)-1=2^{n+2}+2-1=2^{n+2}+1$$

L'hérédité est vérifiée.

Par récurrence, pour tout entier naturel $n\geq 0$, on a : $u_n=2^{n+1}+1$.

Exercice 1C.5 :

Soit la suite (S_n) définie par : $\forall n\geq 1$: $S_n=1+3+5+...+(2n-1)$.

1. *Calculer les 4 premiers termes de la suite et conjecturer une expression de (S_n) en fonction de n.*

$S_1=1$; $S_2=1+3=4$; $S_3=1+3+5=9$; $S_4=1+3+5+7=16$

→il semblerait que $\forall n\geq 1$: $S_n=n^2$

2. *Démontrer cette conjecture à l'aide d'un raisonnement par récurrence :*

L'initialisation vient d'être vérifiée.

Hérédité : supposons qu'il existe un rang $n\in\mathbb{N}$ tel que $S_n=n^2$

→cela implique-t-il $S_{n+1}=(n+1)^2$?

$$S_{n+1}=1+3+5+...+(2n-1)+(2(n+1)-1)=1+3+5+...+(2n-1)+(2n+1)=n^2+(2n+1)$$

$S_{n+1}=n^2+2n+1=(n+1)^2$

→l'hérédité est vérifiée

Par récurrence, on peut affirmer que pour tout $n\geq 1$: $S_n=n^2$

Exercice 1C.6 : *Démontrer que :* $\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p(p+1)}=\frac{n}{n+1}$

Initialisation : $\sum_{p=1}^{1}\frac{1}{p(p+1)}=\frac{1}{1\times(1+1)}=\frac{1}{2}=\frac{1}{1+1}$ donc la propriété est initialisée

Hérédité : supposons qu'il existe un rang $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p(p+1)}=\frac{n}{n+1}$

→ceci implique-t-il que $\sum_{p=1}^{n+1}\frac{1}{p(p+1)}=\frac{(n+1)}{(n+1)+1}=\frac{n+1}{n+2}$?

$$\sum_{p=1}^{n+1}\frac{1}{p(p+1)}=\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p(p+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$\sum_{p=1}^{n+1}\frac{1}{p(p+1)}=\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)}$$

$$\sum_{p=1}^{n+1}\frac{1}{p(p+1)}=\frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}$$

La propriété est initialisée et héréditaire : par récurrence, $\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p(p+1)}=\frac{n}{n+1}$

Exercice 1C.7 : *On donne une suite définie par :* $u_0=13$ *et* $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\frac{1}{5}u_n+\frac{4}{5}$

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n=1+\frac{12}{5^n}$

Initialisation : $1+\frac{12}{5^0}=1+12=13=u_0$ donc la propriété est initialisée

Hérédité : supposons qu'il existe un rang $n\in\mathbb{N}$ tel que $u_n=1+\frac{12}{5^n}$

→ceci implique-t-il que $u_{n+1}=1+\frac{12}{5^{n+1}}$?

Par définition, dans laquelle on va injecter l'hypothèse :

$$u_{n+1}=\frac{1}{5}u_n+\frac{4}{5}=\frac{1}{5}\left(1+\frac{12}{5^n}\right)+\frac{4}{5}=\frac{1}{5}+\frac{12}{5^{n+1}}+\frac{4}{5}=1+\frac{12}{5^{n+1}}$$

La propriété est initialisée et héréditaire : par récurrence, $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=1+\frac{12}{5^n}$

Exercice 1C.8 : *Montrer par récurrence que* $\sum_{p=1}^{n}p(p+1)(p+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

Initialisation : $\sum_{p=1}^{1} p(p+1)(p+2)=1(1+1)(1+2)=6$

et $\dfrac{1(1+1)(1+2)(1+3)}{4}=\dfrac{24}{4}=6$ donc la propriété est initialisée

Hérédité : on suppose que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a : $\sum_{p=1}^{n} p(p+1)(p+2)=\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

→ceci implique-t-il que $\sum_{p=1}^{n+1} p(p+1)(p+2)=\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{4}$?

$$\sum_{p=1}^{n+1} p(p+1)(p+2)=\sum_{p=1}^{n} p(p+1)(p+2)+(n+1)(n+2)(n+3)$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}+(n+1)(n+2)(n+3)$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}+\frac{4(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

$$=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{4}$$

La propriété est initialisée et héréditaire : par récurrence,

$$\sum_{p=1}^{n} p(p+1)(p+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

Exercice 1C.9 : *On considère la suite (v_n) définie par : $v_0=2$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1}=3v_n+n+1$*

Démontrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_n=\dfrac{11}{4}\times 3^n-\dfrac{3}{4}-\dfrac{n}{2}$

Initialisation : $\dfrac{11}{4}\times 3^0-\dfrac{3}{4}-\dfrac{0}{2}=\dfrac{11}{4}-\dfrac{3}{4}=\dfrac{8}{4}=2=v_0$ donc la propriété est initialisée

Hérédité : supposons qu'il existe un rang $n\in\mathbb{N}$ tel que $v_n=\dfrac{11}{4}\times 3^n-\dfrac{3}{4}-\dfrac{n}{2}$

→ceci implique-t-il que $v_{n+1}=\dfrac{11}{4}\times 3^{n+1}-\dfrac{3}{4}-\dfrac{n+1}{2}=\dfrac{11}{4}\times 3^{n+1}-\dfrac{5}{4}-\dfrac{n}{2}$?

$$v_{n+1}=3v_n+n+1=3\left(\frac{11}{4}\times 3^n-\frac{3}{4}-\frac{n}{2}\right)+n+1=\frac{11}{4}\times 3^{n+1}-\frac{9}{4}-\frac{3n}{2}+n+1$$

$$v_{n+1}=\frac{11}{4}\times 3^{n+1}-\frac{9}{4}-\frac{3n}{2}+\frac{2n}{2}+\frac{4}{4}=\frac{11}{4}\times 3^{n+1}-\frac{5}{4}-\frac{n}{2}=\frac{11}{4}\times 3^{n+1}-\frac{3}{4}-\frac{2}{4}-\frac{n}{2}$$

$$v_{n+1}=\frac{11}{4}\times 3^{n+1}-\frac{5}{4}-\frac{n}{2}$$

La propriété est initialisée et héréditaire : par récurrence, $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_n=\dfrac{11}{4}\times 3^n-\dfrac{3}{4}-\dfrac{n}{2}$

Exercice 1C.10 : *On considère la suite (u_n) définie par : $u_0=\dfrac{1}{4}$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=5u_n-1$*

Après avoir calculé les premiers termes de la suite, émettre une conjecture sur l'expression de (u_n) puis la démontrer par récurrence.

$$u_1 = 5u_0 - 1 = 5\times\frac{1}{4} - 1 = \frac{1}{4}\ ,\ \ u_2 = 5u_1 - 1 = 5\times\frac{1}{4} - 1 = \frac{1}{4}$$

La suite (u_n) semble constante.

La propriété est initialisée

Hérédité : supposons qu'il existe un rang $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = \frac{1}{4}$

→ceci implique-t-il que $u_{n+1} = \frac{1}{4}$?

$$u_{n+1} = 5u_n - 1 = 5\times\frac{1}{4} - 1 = \frac{1}{4}$$

La propriété est initialisée et héréditaire : par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, cette suite (u_n) est constante.

Exercice 1C.11 : *On donne une suite définie par :* $u_0 = 2$ *et* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + 2n + 5$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n^2 + 4n + 2$.

Initialisation : $0^2 + 4\times 0 + 2 = 2 = u_0$: l'initialisation est vérifiée.

Hérédité : supposons qu'il existe un rang $n \geq 0$ tel que $u_n = n^2 + 4n + 2$

→ceci implique-t-il que $u_{n+1} = (n+1)^2 + 4(n+1) + 2 = n^2 + 6n + 7$?

En partant du rang *n* :

Par hypothèse : $u_n = n^2 + 4n + 2 \iff u_n + 2n + 5 = n^2 + 4n + 2 + 2n + 5 \iff u_{n+1} = n^2 + 6n + 7$

En partant du rang *n*+1 :

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 5 = n^2 + 4n + 2 + 2n + 5 = n^2 + +6n + 7$$

L'hérédité est vérifiée.

Par récurrence, pour tout entier naturel $n \geq 0$, on a : $u_{n+1} = u_n + 2n + 5$.

Exercice 1C.12 : *On donne une suite définie par :* $u_0 = -2$ *et* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 6 - \frac{8}{2^n}$.

Initialisation : $6 - \frac{8}{2^0} = -2 = u_0$: l'initialisation est vérifiée.

Hérédité : supposons qu'il existe un rang $n \geq 0$ tel que $u_n = 6 - \frac{8}{2^n}$

→ceci implique-t-il que $u_{n+1} = 6 - \frac{8}{2^{n+1}}$?

Par définition puis en injectant l'hypothèse :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3 = \frac{1}{2}\left(6 - \frac{8}{2^n}\right) + 3 = 3 - \frac{8}{2^{n+1}} + 3 = 6 - \frac{8}{2^{n+1}}$$

L'hérédité est vérifiée.

Par récurrence, pour tout entier naturel $n \geq 0$, on a : $u_n = 6 - \frac{8}{2^n}$.

Exercice 1C.13 : *On donne une suite définie par :* $u_0 = 1$ *et* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2$.

Montrer que $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\frac{25}{4}\times\frac{1}{3^n}+\frac{3n}{2}-\frac{21}{4}$.

Initialisation : $\frac{25}{4}\times\frac{1}{3^0}+\frac{3\times 0}{2}-\frac{21}{4}=\frac{25}{4}-\frac{21}{4}=\frac{4}{4}=1=u_0$: l'initialisation est vérifiée.

Hérédité : supposons qu'il existe un rang $n\geq 0$ tel que $u_n=\frac{25}{4}\times\frac{1}{3^n}+\frac{3n}{2}-\frac{21}{4}$

→ceci implique-t-il que $u_{n+1}=\frac{25}{4}\times\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{3(n+1)}{2}-\frac{21}{4}=\frac{25}{4}\times\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{3n}{2}-\frac{15}{4}$?

<u>**En partant du rang *n* :**</u>

Par hypothèse : $u_n=\frac{25}{4}\times\frac{1}{3^n}+\frac{3n}{2}-\frac{21}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{3}u_n=\frac{1}{3}\left(\frac{25}{4}\times\frac{1}{3^n}+\frac{3n}{2}-\frac{21}{4}\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}u_n+n-2=\frac{25}{4}\times\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{3n}{2}\times\frac{1}{3}-\frac{21}{4}\times\frac{1}{3}+n-2$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1}=\frac{25}{4}\times\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{n}{2}-\frac{7}{4}+n-\frac{8}{4}$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1}=\frac{25}{4}\times\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{3n}{2}-\frac{15}{4}$$

<u>**En partant du rang *n*+1 :**</u>

$$u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+n-2=\frac{1}{3}\left(\frac{25}{4}\times\frac{1}{3^n}+\frac{3n}{2}-\frac{21}{4}\right)+n-2=\frac{25}{4}\times\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{n}{2}-\frac{7}{4}+n-2$$

$$=\frac{25}{4}\times\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{3n}{2}-\frac{15}{4}$$

L'hérédité est vérifiée.

Par récurrence, pour tout entier naturel $n\geq 0$, on a : $u_n=\frac{25}{4}\times\frac{1}{3^n}+\frac{3n}{2}-\frac{21}{4}$.

<u>**Exercice 1C.14 :**</u> *Montrer par récurrence que,* $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ a^n-b^n=(a-b)\sum_{p=0}^{n-1}a^{(n-1-p)}b^p$

Initialisation : $(a-b)\sum_{p=0}^{1-1}a^{(1-1-p)}b^p=(a-b)\times a^0b^0=a-b=a^1-b^1$

donc la propriété est initialisée

Hérédité : supposons qu'il existe un rang $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $a^n-b^n=(a-b)\sum_{p=0}^{n-1}a^{(n-1-p)}b^p$

→ceci implique-t-il que $a^{n+1}-b^{n+1}=(a-b)\sum_{p=0}^{n}a^{(n-p)}b^p$?

$$a^{n+1}-b^{n+1}=a\times a^n-b\times b^n=a\times a^n-b\times a^n+b\times a^n-b\times b^n=(a-b)a^n+b\times(a^n-b^n)$$

$$a^{n+1}-b^{n+1}=(a-b)a^n+b\times(a-b)\sum_{p=0}^{n-1}a^{(n-1-p)}b^p=(a-b)\left[a^n+b\sum_{p=0}^{n-1}a^{(n-1-p)}b^p\right]$$

$$a^{n+1}-b^{n+1}=(a-b)\left[a^n\times b^0+\sum_{p=0}^{n-1}a^{(n-1-p)}b^{p+1}\right]=(a-b)\left[a^n\times b^0+\sum_{p=1}^{n}a^{(n-p)}b^p\right]$$

$$a^{n+1}-b^{n+1}=(a-b)\sum_{p=0}^{n}a^{(n-p)}b^p$$

La propriété est initialisée et héréditaire : par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{p=0}^{n-1} a^{(n-1-p)}\, b^p$$

NB : autre méthode sans la récurrence : $\displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} a^{(n-1-p)}\, b^p = a^{n-1}b^0 + a^{n-2}b^1 + \ldots + a^0 b^{n-1}$

On a : $\displaystyle a \times \sum_{p=0}^{n-1} a^{(n-1-p)}\, b^p = a^n b^0 + a^{n-1}b^1 + \ldots + a^1 b^{n-1}$

$$b \times \sum_{p=0}^{n-1} a^{(n-1-p)}\, b^p = a^{n-1}b^1 + a^{n-2}b^2 + \ldots + a^0 b^n$$

Si on soustrait la deuxième ligne à la première, on obtient :

$$(a-b)\times \sum_{p=0}^{n-1} a^{(n-1-p)}\, b^p = a^n - b^n \ : \ \text{CQFD}$$

Exercice 1C.15 : *On considère la suite (u_n) définie par : $u_2 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+2} = -3u_{n+1} - 2u_n$*

Démontrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_2 = u_1 = 1$ et $u_n = (-2)^n - 3(-1)^n$

Initialisation : $u_2 = 1$ et $(-2)^2 - 3(-1)^2 = 4 - 3 = 1$

$$u_3 = -3u_2 - 2u_1 = -3 - 2 = -5 \quad \text{et} \quad (-2)^3 - 3(-1)^3 = -8 + 3 = -5$$

donc la propriété est initialisée

Hérédité : supposons qu'il existe un rang $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ tel que :

$u_n = (-2)^n - 3(-1)^n$ et $u_{n+1} = (-2)^{n+1} - 3(-1)^{n+1}$

→ceci implique-t-il que $u_{n+2} = (-2)^{n+2} - 3(-1)^{n+2}$?

$$u_{n+2} = -3u_{n+1} - 2u_n = -3\left((-2)^{n+1} - 3(-1)^{n+1}\right) - 2\left((-2)^n - 3(-1)^n\right)$$

$$u_{n+2} = -3(-2)^{n+1} + 3\times 3(-1)^{n+1} - 2(-2)^n + 2\times 3(-1)^n$$

$$u_{n+2} = -3(-2)^{n+1} - 2(-2)^n + 3\times 3(-1)^{n+1} + 2\times 3(-1)^n$$

or $(-1)^n = (-1)^{n+2}$ et $(-1)^{n+1} = -(-1)^{n+2}$

$$u_{n+2} = -3(-2)^{n+1} + (-2)^{n+1} - 3\times 3(-1)^{n+2} + 2\times 3(-1)^{n+2} = -2(-2)^{n+1} - 3(-1)^{n+2}$$

$$u_{n+2} = (-2)^{n+2} - 3(-1)^{n+2}$$

La propriété est initialisée et héréditaire : par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $2 \leq u_n \leq 3$

Exercice 1C.16 : *On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :* $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = 3 \\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$.

Démontrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3\times 2^n - 3^n$.

Initialisation : $3\times2^0-3^0=3-1=2=u_0$ et $3\times2^1-3^1=6-3=3=u_1$

donc la propriété est initialisée

Hérédité : supposons qu'il existe un rang $n\in\mathbb{N}$ tel que :

$u_n=3\times2^n-3^n$ et $u_{n+1}=3\times2^{n+1}-3^{n+1}$

→ceci implique-t-il que $u_{n+2}=3\times2^{n+2}-3^{n+2}$?

Par définition puis en injectant les hypothèses :

$$\begin{aligned}u_{n+2}&=5u_{n+1}-6u_n=5\left(3\times2^{n+1}-3^{n+1}\right)-6\left(3\times2^n-3^n\right)\\&=15\times2^{n+1}-5\times3^{n+1}-18\times2^n+6\times3^n\\&=15\times2^{n+1}-5\times3^{n+1}-9\times2^{n+1}+2\times3^{n+1}\\&=6\times2^{n+1}-3\times3^{n+1}\\&=3\times2^{n+2}-3^{n+2}\end{aligned}$$

→l'hérédité est vérifiée

Par récurrence, $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=3\times2^n-3^n$.

Exercice 1C.17 : On considère la suite (u_n) définie par : $u_1=u_0=1$ et $\forall n\geq2,\ u_n=u_{n-1}+u_{n-2}$

Cette suite est appelée suite de FIBONACCI : 1 , 1 , 2 , 3 , 5 , 8 , 13 , 21 , 34 , 55 , 89 , …

On pose $\varphi=\dfrac{1+\sqrt5}{2}$: ce nombre est appelé le nombre d'or.

1) $\varphi^2=\left(\dfrac{1+\sqrt5}{2}\right)^2=\dfrac{1+2\sqrt5+5}{4}=\dfrac{6+2\sqrt5}{4}=\dfrac{3+\sqrt5}{2}=\dfrac{1+\sqrt5}{2}+1=\varphi+1$

2) $\varphi^3=\varphi\times\varphi^2=\varphi\times(\varphi+1)=\varphi^2+\varphi=\varphi+1+\varphi=2\varphi+1$

$\varphi^4=\varphi\times\varphi^3=\varphi\times(2\varphi+1)=2\varphi^2+\varphi=2\varphi+2+\varphi=3\varphi+2$

$\varphi^5=\varphi\times\varphi^4=\varphi\times(3\varphi+2)=3\varphi^2+2\varphi=3\varphi+3+2\varphi=5\varphi+3$

$\varphi^6=\varphi\times\varphi^5=\varphi\times(5\varphi+3)=5\varphi^2+3\varphi=5\varphi+5+3\varphi=8\varphi+5$

3) φ^n semble s'écrire de la forme : $u_{n-1}\times\varphi+u_{n-2}$

4) *Démontrer alors cette conjecture avec un entier naturel quelconque n.*

Initialisation : $\varphi^2=u_1\times\varphi+u_0$ donc : la propriété est initialisée

Hérédité : supposons qu'il existe un rang $n\in\mathbb{N},\ n\geq2$ tel que $\varphi^n=u_{n-1}\times\varphi+u_{n-2}$

→ceci implique-t-il que $\varphi^{n+1}=u_n\times\varphi+u_{n-1}$?

$\varphi^{n+1}=\varphi\times\varphi^n=\varphi\times(u_{n-1}\times\varphi+u_{n-2})=u_{n-1}\times\varphi^2+u_{n-2}\times\varphi$

$\varphi^{n+1}=u_{n-1}\times(1+\varphi)+u_{n-2}\times\varphi=u_{n-1}+u_{n-1}\varphi+u_{n-2}\times\varphi$

$\varphi^{n+1}=(u_{n-1}+u_{n-2})\times\varphi+u_{n-1}=u_n\times\varphi+u_{n-1}$

La propriété est initialisée et héréditaire : par récurrence, $\forall n\geq2$, on a : $\varphi^n=u_{n-1}\times\varphi+u_{n-2}$

Exercice 1C.18 : *On considère la suite (u_n) définie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par :* $\begin{cases}u_1=1\\u_{n+1}=\dfrac{u_n}{\sqrt{u_n^{\,2}+1}}\end{cases}$.

Démontrer que, $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\dfrac{1}{\sqrt n}$

Initialisation : $\frac{1}{\sqrt{1}}=1=u_1$ donc la propriété est initialisée

Hérédité : supposons qu'il existe un rang $n\in\mathbb{N}$ tel que : $u_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$

→ceci implique-t-il que $u_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{n+1}}$?

Par définition puis en injectant les hypothèses :

$$u_{n+1}=\frac{u_n}{\sqrt{u_n{}^2+1}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2+1}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{1}{n}+1}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{1+n}{n}}}=\frac{1}{\sqrt{n}}\times\sqrt{\frac{n}{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{n}}\times\sqrt{\frac{n}{n(n+1)}}u_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

→l'hérédité est vérifiée

Par récurrence, $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Exercice 1C.19 : *Démontrer par récurrence que,* $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \cos^{(n)}(x)=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$

Initialisation : $\cos^{(1)}(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin(x)$: ok

Hérédité : supposons qu'il existe un rang $n\in\mathbb{N}$ tel que $\cos^{(n)}(x)=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$

→cela implique-t-il $\cos^{(n+1)}(x)=\cos\left(x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right)$?

$$\cos^{(n+1)}(x)=\left(\cos^{(n)}(x)\right)'=\left(\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)\right)'=-\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\cos\left(\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

→l'hérédité est vérifiée

Par récurrence, $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \cos^{(n)}(x)=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$