**Exercices sur le raisonnement par récurrence**

**L'étude de la fonction associée à la suite permet de résoudre aisément des situations compliquées**

**Exercice 1D.1 :** Soit la suite $(v_n)$ définie par : $v_0 = \frac{2}{3}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ , $v_{n+1} = v_n(2-v_n)$

Montrer que $(v_n)$ est minorée par 0 et majorée par 1.

**Exercice 1D.2 :**

On considère la suite $(u_n)$ définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{9}{6-u_n}$.

Montrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 3$.

**Exercice 1D.3 :**

On considère la suite $(u_n)$ définie par : $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{u_n+1}$.

Montrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{3}{2} < u_n \leq 2$.

**Exercice 1D.4 :**

On considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel $n$ :

$$u_{n+1} = \frac{u_n+2}{u_n+5}.$$

Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$.

**Exercice 1D.5 :** Soit la suite $(v_n)$ définie par : $v_0 = 13$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ , $v_{n+1} = \sqrt{4v_n - 3}$

1. On admet que la fonction $f :\ x \mapsto \sqrt{4x-3}$ est croissante sur son ensemble de définition $\left[\frac{3}{4};+\infty\right[$ .

   Tracer avec précision la courbe représentative de $f$ *(unité : 1 cm en abscisse, 3 cm en ordonnée)*, puis, à l'aide de la droite $y = x$ , placer les 4 premiers points de la suite.
2. Conjecturer le sens de variation de la suite $(v_n)$, ainsi qu'un minorant et un majorant de cette suite.
3. Démontre les conjectures précédentes par deux récurrences distinctes.

**Exercice 1D.6 :** Reprendre les trois questions de l'exercice 11 avec :

Soit la suite $(v_n)$ définie par : $v_0 = \frac{7}{4}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ , $v_{n+1} = \sqrt{4v_n - 3}$

**Exercice 1D.7 :**

On considère la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$.

1. Étudier les variations de *f*.
2. On considère la suite définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel *n*, $u_{n+1} = f(u_n)$.

   a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel *n*, $\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 5$.

   b) Que peut-on conclure ?

**Exercice 1D.1 :** *Soit la suite* $(v_n)$ *définie par :* $v_0 = \dfrac{2}{3}$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}$ , $v_{n+1} = v_n(2 - v_n)$

*Montrer que* $(v_n)$ *est minorée par 0 et majorée par 1.*

**Initialisation**

$v_0 = \dfrac{2}{3}$ donc $0 \le v_0 \le 1$ : l'initialisation est vérifiée.

**Hérédité**

On peut étudier la fonction $f(x) = x(2-x) = 2x - x^2$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}^+$

$f'(x) = 2 - 2x = 2(1-x)$ : ainsi $f'(x) > 0$ si $x < 1$

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | |

$f(0) = 0 \times (2-0) = 0$ et $f(1) = 1 \times (2-1) = 1$

Supposons qu'il existe un rang *n* tel que $0 \le v_n \le 1$, cela implique-t-il $0 \le v_{n+1} \le 1$ ?

Par hypothèse : $0 \le v_n \le 1$

Or la fonction *f* est croissante sur l'intervalle $[0;1]$ donc :

$$f(0) \le f(v_n) \le f(1)$$

Soit $0 \le v_{n+1} \le 1$ : l'hérédité est vérifiée.

Par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$ , $0 \le v_n \le 1$.

**Exercice 1D.2 :**

*On considère la suite* $(u_n)$ *définie par :* $u_0 = 1$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{9}{6 - u_n}$.

*Montrer par récurrence que,* $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 3$.

**Initialisation** : $u_0 = 1$ donc $0 < u_0 < 3$ : la propriété est initialisée

**Hérédité** : supposons qu'il existe un rang $n \in \mathbb{N}$ tel que $0 < u_n < 3$

→ceci implique-t-il que $0 < u_{n+1} < 3$ ?

On étudie la fonction associée *f* définie sur $[0;3]$ par : $f(x) = \dfrac{9}{6-x}$ :

$$f'(x) = \frac{-9 \times (-1)}{(6-x)^2} = \frac{9}{(6-x)^2}$$

La dérivée est positive sur $[0;3]$ donc la fonction *f* est strictement croissante sur $[0;3]$.

Ainsi par hypothèse :

$$0 < u_n < 3$$

$$\Leftrightarrow \quad f(0) < f(u_n) < f(3)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3}{2} < u_{n+1} < 3$$

La relation $0 < u_{n+1} < 3$ est vérifiée et l'hérédité est vérifiée.

Par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 3$.

## Exercice 1D.3 :

*On considère la suite* $(u_n)$ *définie par :* $u_0 = 2$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 1}$.

*Montrer par récurrence que,* $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{3}{2} < u_n \leq 2$.

**Initialisation** : $u_0 = 2$ donc $\dfrac{3}{2} < u_0 \leq 2$ : la propriété est initialisée

**Hérédité** : supposons qu'il existe un rang $n \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{3}{2} < u_n \leq 2$

→ceci implique-t-il que $\dfrac{3}{2} < u_{n+1} \leq 2$ ?

On étudie la fonction associée *f* définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$ :

$$f'(x) = \frac{2(x+1) - (2x+1) \times 1}{(x+1)^2} = \frac{2x+2-2x-1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

La dérivée est positive sur $\mathbb{R}^+$ donc la fonction *f* est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
Ainsi par hypothèse :

$$\frac{3}{2} < u_n \leq 2$$

$$\Leftrightarrow \quad f\left(\frac{3}{2}\right) < f(u_n) \leq f(2)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{8}{5} < u_{n+1} < \frac{5}{3}$$

La relation $\dfrac{3}{2} < u_{n+1} \leq 2$ est vérifiée et l'hérédité est vérifiée.

Par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{3}{2} < u_n \leq 2$.

## Exercice 1D.4 :

*On considère la suite* $(u_n)$ *définie sur* $\mathbb{N}$ *par :* $u_0 = 2$ *et, pour tout entier naturel n :* $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2}{u_n + 5}$.

*Démontrer que pour tout entier naturel* $n \geq 2$, $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{2}$.

<u>**Initialisation**</u> : Pour $n = 2$ : on doit calculer $u_0$, $u_1$ et $u_2$ :

$$u_0 = 2 \;,\; u_1 = \frac{u_0+2}{u_0+5} = \frac{2+2}{2+5} = \frac{4}{7} \quad \text{et} \quad u_2 = \frac{u_1+2}{u_1+5} = \frac{\frac{4}{7}+2}{\frac{4}{7}+5} = \frac{\frac{4}{7}+\frac{14}{7}}{\frac{4}{7}+\frac{35}{7}} = \frac{\frac{18}{7}}{\frac{39}{7}} = \frac{18}{7} \times \frac{7}{39} = \frac{18}{39}$$

$0 \leq u_2 \leq \frac{1}{2}$ : l'initialisation est vérifiée.

**<u>Hérédité</u>** : Supposons qu'il existe un rang $n \geq 2$ tel que : $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$

→est-ce que $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$ ?

On définit la fonction $f(x) = \frac{x+2}{x+5}$ telle que $f(u_n) = \frac{u_n + 2}{u_n + 5} = u_{n+1}$.

Cette fonction est dérivable sur $[0;+\infty[$ et sa dérivée est :

$$f'(x) = \frac{1(x+5)-(x+2)\times 1}{(x+5)^2} = \frac{x+5-x-2}{(x+5)^2} = \frac{3}{(x+5)^2}$$

Cette dérivée est positive donc la fonction *f* est croissante sur $[0;+\infty[$.

**Pour une inéquation, on part du rang *n*** : par hypothèse :

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$$

La fonction *f* est croissante sur $[0;+\infty[$ donc :

$$f(0) \leq f(u_n) \leq f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2}{5} \leq f(u_n) \leq \frac{5}{11}$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \leq \frac{2}{5} \leq u_{n+1} \leq \frac{5}{11} \leq \frac{1}{2}$$ →l'hérédité est vérifiée

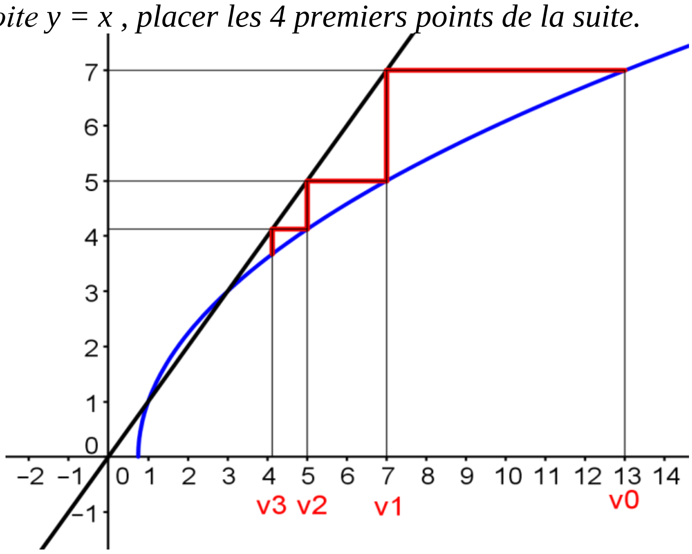
Par récurrence, pour tout entier naturel $n \geq 2$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$.

**<u>Exercice 1D.5 :</u>**

*Soit la suite $(v_n)$ définie par : $v_0 = 13$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ , $v_{n+1} = \sqrt{4v_n - 3}$*

**1.** *On admet que la fonction $f : x \mapsto \sqrt{4x-3}$ est croissante sur son ensemble de définition $\left[\frac{3}{4};+\infty\right[$ .*

*Tracer avec précision la courbe représentative de $f$ (unité : 1 cm en abscisse, 3 cm en ordonnée), puis, à l'aide de la droite y = x , placer les 4 premiers points de la suite.*



2. *Conjecturer le sens de variation de la suite $(v_n)$, ainsi qu'un minorant et un majorant de cette suite.*

   Cette suite $(v_n)$ semble décroissante, elle serait donc majorée par son premier terme $v_0 = 13$ et semble minorée par la valeur 3 qui serait un point de convergence.

3. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(v_n)$ est décroissante :

   **Initialisation** : $v_1 = \sqrt{4v_0 - 3} = \sqrt{4\times 13 - 3} = \sqrt{49} = 7$ donc $v_1 \le v_0$ : la propriété est initialisée

   **Hérédité** : supposons qu'il existe un rang $n \in \mathbb{N}$ tel que $v_{n+1} \le v_n$

   →ceci implique-t-il que $v_{n+2} \le v_{n+1}$ ?

   Par hypothèse :

   $v_{n+1} \le v_n$

   Or la fonction $f :\ x \mapsto \sqrt{4x - 3}$ est croissante sur son ensemble de définition $\left[\frac{3}{4};+\infty\right[$ donc :

   $f(v_{n+1}) \le f(v_n)$

   $\Leftrightarrow\ v_{n+2} \le v_{n+1}$

   La propriété est initialisée et héréditaire : par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(v_n)$ est décroissante.

   Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $3 \le v_n \le 13$ :

   **Initialisation** : $3 \le v_0 \le 13$ donc la propriété est initialisée

   **Hérédité** : supposons qu'il existe un rang $n \in \mathbb{N}$ tel que $3 \le v_n \le 13$

   →ceci implique-t-il que $3 \le v_{n+1} \le 13$ ?

   Par hypothèse :

   $3 \le v_n \le 13$

   Or la fonction $f :\ x \mapsto \sqrt{4x - 3}$ est croissante sur son ensemble de définition $\left[\frac{3}{4};+\infty\right[$ donc :

   $f(3) \le f(v_n) \le f(13)$

   $\Leftrightarrow\ 3 \le v_{n+1} \le 7 \le 13$

   La propriété est initialisée et héréditaire : par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $3 \le v_n \le 13$

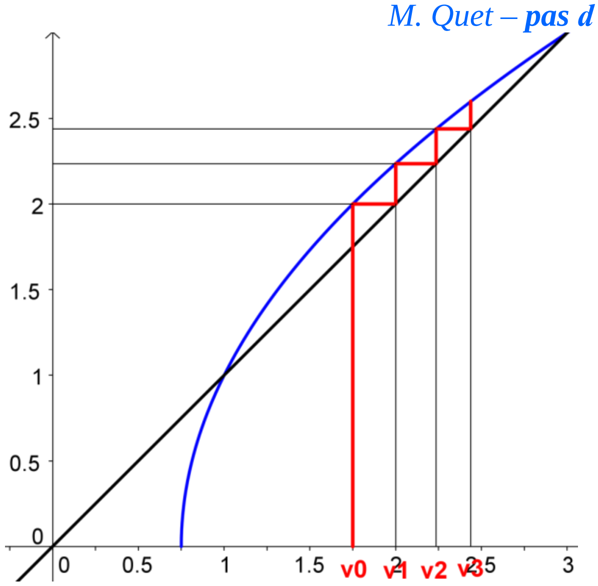
## Exercice 1D.6 :

*Reprendre les trois questions de l'exercice 11 avec :*

*Soit la suite $(v_n)$ définie par : $v_0 = \frac{7}{4}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ , $v_{n+1} = \sqrt{4v_n - 3}$*

1. *On admet que la fonction $f :\ x \mapsto 4x - 3$ est croissante sur son ensemble de définition $\left[\frac{3}{4};+\infty\right[$ .*

   *Tracer avec précision la courbe représentative de $f$ , puis, à l'aide de la droite $y = x$ , placer les 4 premiers points de la suite.*




**2.** Cette suite $(v_n)$ semble croissante, elle serait donc minorée par son premier terme $v_0 = \frac{7}{4}$ et semble majorée par la valeur 3 qui serait un point de convergence.

**3.** Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(v_n)$ est croissante :

**Initialisation** : $v_1 = \sqrt{4v_0 - 3} = \sqrt{4 \times \frac{7}{4} - 3} = \sqrt{4} = 2$ donc $v_1 \geq v_0$ : la propriété est initialisée

**Hérédité** : supposons qu'il existe un rang $n \in \mathbb{N}$ tel que $v_{n+1} \geq v_n$

→ceci implique-t-il que $v_{n+2} \geq v_{n+1}$ ?

Par hypothèse :

$$v_{n+1} \geq v_n$$

Or la fonction $f : x \mapsto \sqrt{4x-3}$ est croissante sur son ensemble de définition $\left[\frac{3}{4}; +\infty\right[$ donc :

$$f(v_{n+1}) \geq f(v_n)$$

$$\Leftrightarrow \quad v_{n+2} \geq v_{n+1}$$

La propriété est initialisée et héréditaire : par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(v_n)$ est croissante.

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{7}{4} \leq v_n \leq 3$ :

**Initialisation** : $\frac{7}{4} \leq v_0 \leq 3$ donc la propriété est initialisée

**Hérédité** : supposons qu'il existe un rang $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{7}{4} \leq v_n \leq 3$

→ceci implique-t-il que $\frac{7}{4} \leq v_{n+1} \leq 3$ ?

Par hypothèse :

$$\frac{7}{4} \leq v_n \leq 3$$

Or la fonction $f : x \mapsto \sqrt{4x-3}$ est croissante sur son ensemble de définition $\left[\frac{3}{4}; +\infty\right[$ donc :

$$f\left(\frac{7}{4}\right) \leq f(v_n) \leq f(3) \quad \Leftrightarrow \quad 2 \leq v_{n+1} \leq 3$$

La propriété est initialisée et héréditaire : par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{7}{4} \leq v_n \leq 3$

## Exercice 1D.7 :

*On considère la fonction définie sur* $]0;+\infty[$ *par* $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$.

**1.** *Étudier les variations de f.*

La fonction *f* est dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant qu'expression et inverse de fonction polynômiale.

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2}{2x^2} - \frac{2}{2x^2} = \frac{\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)}{2x^2}.$$

Pour tout $x \in ]0;+\infty[$, $\frac{\left(x+\sqrt{2}\right)}{2x^2} > 0$ et $x - \sqrt{2} > 0 \Leftrightarrow x > \sqrt{2}$

Donc si $x \in \left]\sqrt{2};+\infty\right[$, $f'(x) > 0$ et la fonction *f* est strictement croissante sur $\left]\sqrt{2};+\infty\right[$,

si $x \in \left]0;\sqrt{2}\right[$, $f'(x) < 0$ et la fonction *f* est strictement décroissante sur $\left]0;\sqrt{2}\right[$.

**2.** On considère la suite définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel *n*, $u_{n+1} = f(u_n)$.

**a)** *Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,* $\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 5$.

**Initialisation** : $u_1 = f(u_0) = \frac{u_0}{2} + \frac{1}{u_0} = \frac{5}{2} + \frac{1}{5} = \frac{25}{10} + \frac{2}{10} = \frac{27}{10}$

Donc $\sqrt{2} \leq u_1 \leq u_0 \leq 5$ : l'initialisation est vérifiée.

**Hérédité** : supposons qu'il existe un rang $n \in \mathbb{N}$ tel que $\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 5$

→ceci implique-t-il que $\sqrt{2} \leq u_{n+2} \leq u_1 \leq 5$ ?

Par hypothèse : $\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 5$.

Or la fonction *f* est strictement croissante sur $\left]\sqrt{2};+\infty\right[$, donc :

$$f\left(\sqrt{2}\right) \leq f\left(u_{n+1}\right) \leq f(u_n) \leq f(5)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq \frac{5}{2} + \frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq \frac{27}{10}$$ →l'hérédité est vérifiée.

Par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 5$

**b)** *Que peut-on conclure ?*

La suite est décroissante et minorée : elle converge vers une valeur comprise dans $\left[\sqrt{2};5\right]$.