Exercices sur le raisonnement par récurrence

Exercice 1E.1 : Calculer $\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\frac{1}{1+2+3+4+5}+\ldots$

Exercice 1E.2 : Calculer $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}\ldots$

Exercice 1E.3 :

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on note :

$$S_n=\frac{4}{1(1+1)(1+2)}+\frac{4}{2(2+1)(2+2)}+\ldots+\frac{4}{n(n+1)(n+2)}.$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, montrer que $S_n=\frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}$.

Exercice 1E.4 : Démontrer par récurrence que, $\forall n\in\mathbb{N}^*$:

$$S_n=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\ldots+\frac{1}{n\times(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}$$

Exercice 1E.5 :

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on note :

$$C_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\times k^2=(-1)\times 1^2+1\times 2^2-1\times 3^2+\ldots+(-1)^n\times n^2$$

et $$S_n=\sum_{k=1}^{n}k=1+2+\ldots+n.$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, montrer que $C_n=(-1)^n\times S_n$.

Exercice 1E.6 :

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, montrer que $S_n=\sum_{k=1}^{n}k\times k!=(n+1)!-1$.

Exercice 1E.6 :

La suite u est définie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par : $\begin{cases}u_1=1\\ u_{n+1}=u_n+\frac{1}{n(n+1)}\end{cases}$.

1) En remarquant que $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$, trouver une formule explicite de u.

2) Démontrer cette formule par récurrence.

Exercice 1E.1 :

Calculer $\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\frac{1}{1+2+3+4+5}+...$

On définit la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_1=\frac{1}{1+2}=\frac{1}{3} \quad ,$$

$$u_2=\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}\ ,$$

$$u_3=\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{10}=\frac{5}{10}+\frac{1}{10}=\frac{6}{10}\ ,$$

$$u_4=\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\frac{1}{1+2+3+4+5}=\frac{3}{5}+\frac{1}{15}=\frac{9}{15}+\frac{1}{15}=\frac{10}{15}$$

Or : $\quad 1+2+3+4+5+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$

Donc il semblerait que :

$$u_n=\frac{1+2+...+n}{1+2+...+n+(n+1)}=\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}=\frac{n(n+1)}{2}\times\frac{2}{(n+1)(n+2)}=\frac{n}{n+2}$$

Vérifions-le :

$$u_1=\frac{1}{3}=\frac{1}{1+2}$$

$$u_2=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{2}{2+2}$$

$$u_3=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}=\frac{3}{3+2}$$

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n=\frac{n}{n+2}$.

Initialisation : $u_1=\frac{1}{3}=\frac{1}{1+2}$: l'initialisation est vérifiée

Hérédité : supposons qu'il existe un entier naturel n tel que $u_n=\frac{n}{n+2}$

→est-ce que $u_{n+1}=\frac{n+1}{n+3}$?

Par hypothèse : $u_n=\frac{n}{n+2}$

$$u_{n+1}=\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\frac{1}{1+2+3+4+5}+...+\frac{1}{1+2+3+4+5+...+(n+1)+(n+2)}$$

$$u_{n+1}=u_n+\frac{1}{1+2+3+4+5+...+(n+1)+(n+2)}=\frac{n}{n+2}+\frac{2}{(n+2)(n+3)}$$

$$=\frac{n(n+3)}{(n+2)(n+3)}+\frac{2}{(n+2)(n+3)}=\frac{n^2+3n+2}{(n+2)(n+3)}=\frac{(n+1)(n+2)}{(n+2)(n+3)}=\frac{n+1}{n+3}$$

L'hérédité est vérifiée.

Par récurrence, pour tout entier naturel n, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de la forme : $u_n = \dfrac{n}{n+2}$.

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n\left(1+\frac{2}{n}\right)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1+\frac{2}{n}} = 1.$

Donc : $$\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\frac{1}{1+2+3+4+5}+\ldots=1$$

Exercice 1E.2 :

Calculer $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{16}-\dfrac{1}{32}\ldots$

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}\ldots=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{32}\right)\ldots=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}\ldots=\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}\ldots$$

On reconnait la somme des termes d'une suite géométrique de premier terme $\dfrac{1}{2}$ et de raison $\dfrac{1}{2^2}=\dfrac{1}{4}$.

Ainsi : $$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}\ldots=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\times\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\times\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$$

Exercice 1E.3 :

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$*, on note :* $S_n=\dfrac{4}{1(1+1)(1+2)}+\dfrac{4}{2(2+1)(2+2)}+\ldots+\dfrac{4}{n(n+1)(n+2)}$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$*, montrer que* $S_n=\dfrac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}$.

Initialisation : Pour $n=1$: $S_1=\dfrac{4}{1(1+1)(1+2)}=\dfrac{4}{2\times3}=\dfrac{2}{3}$

$$\frac{1(1+3)}{(1+1)(1+2)}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}=S_1 \text{ : ok}$$

Hérédité : supposons qu'il existe un entier naturel $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $S_n=\dfrac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}$

→cela implique-t-il que $S_{n+1}=\dfrac{(n+1)((n+1)+3)}{((n+1)+1)((n+1)+2)}=\dfrac{(n+1)(n+4)}{(n+2)(n+3)}=\dfrac{n^2+5n+4}{(n+2)(n+3)}$?

Par définition :

$$S_{n+1}=\frac{4}{1(1+1)(1+2)}+\frac{4}{2(2+1)(2+2)}+\ldots+\frac{4}{n(n+1)(n+2)}+\frac{4}{(n+1)((n+1)+1)((n+1)+2)}$$

$$=S_n+\frac{4}{(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}+\frac{4}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$=\frac{1}{(n+1)(n+2)}\left[n(n+3)+\frac{4}{(n+3)}\right]=\frac{1}{(n+1)(n+2)}\left[\frac{n(n+3)^2+4}{n+3}\right]$$

$$=\frac{1}{(n+1)(n+2)}\left[\frac{n\left(n^2+6n+9\right)+4}{n+3}\right]=\frac{n^3+6n^2+9n+4}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$ → -1 est solution évidente

$$=\frac{(n+1)\left(n^2+5n+4\right)}{(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{n^2+5n+4}{(n+2)(n+3)}=\frac{(n+1)(n+4)}{(n+2)(n+3)}$$ →l'hérédité est vérifiée.

Par récurrence, pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, $S_n=\frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}$.

Exercice 1E.4 :

Démontrer par récurrence que, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ *:* $S_n=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+...+\frac{1}{n\times(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}$

Initialisation : $S_1=\frac{1}{1\times 2}=\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{1+1}$: ok

Hérédité : supposons qu'il existe un rang $n\in\mathbb{N}$ tel que $S_n=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+...+\frac{1}{n\times(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}$

→cela implique-t-il $S_{n+1}=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+...+\frac{1}{n\times(n+1)}+\frac{1}{(n+1)\times(n+2)}=1-\frac{1}{n+2}$?

On a :

$$S_{n+1}=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+...+\frac{1}{n\times(n+1)}+\frac{1}{(n+1)\times(n+2)}$$

Or par hypothèse : $S_n=1-\frac{1}{n+1}$, donc

$$S_{n+1}=1-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)\times(n+2)}$$
$$=\frac{n+1}{n+1}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$
$$=\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$
$$=\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$
$$=\frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)}$$
$$=\frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}$$
$$=\frac{n+1}{n+2}$$
$$=\frac{n+2-1}{n+2}$$
$$=1-\frac{1}{n+2}$$

→l'hérédité est vérifiée

Par récurrence, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $S_n=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+...+\frac{1}{n\times(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}$

Exercice 1E.5 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$*, on note :*

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \times k^2 = (-1) \times 1^2 + 1 \times 2^2 - 1 \times 3^2 + \ldots + (-1)^n \times n^2$$

et $$S_n = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \ldots + n .$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$*, montrer que* $C_n = (-1)^n \times S_n$.

Initialisation : Pour $n=1$: $C_1 = \sum_{k=1}^{1} (-1)^k \times k^2 = (-1)^1 \times 1^2 = -1$ et $S_1 = \sum_{k=1}^{1} k = 1$

→ $C_1 = (-1)^1 \times S_1$: l'initialisation est vérifiée

Hérédité : supposons qu'il existe un entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $C_n = (-1)^n \times S_n$

→cela implique-t-il que $C_{n+1} = (-1)^{n+1} \times S_{n+1}$?

Par définition :

$$C_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \times k^2 = (-1) \times 1^2 + 1 \times 2^2 - 1 \times 3^2 + \ldots + (-1)^n \times n^2 + (-1)^{n+1} \times (n+1)^2$$

$$= C_n + (-1)^{n+1} \times (n+1)^2 = (-1)^n \times S_n + (-1)^{n+1} \times (n+1)^2$$

$$= (-1)^{n+1} \times (-1) \times S_n + (-1)^{n+1} \times (n+1)^2 = (-1)^{n+1} \left[-S_n + (n+1)^2 \right]$$

Or : $$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Donc : $$C_{n+1} = (-1)^{n+1} \left[-\frac{n(n+1)}{2} + (n+1)^2 \right] = (-1)^{n+1} (n+1) \left[\frac{-n}{2} + (n+1) \right]$$

$$= (-1)^{n+1} (n+1) \left[\frac{-n+2n+2}{2} \right] = (-1)^{n+1} (n+1) \times \frac{n+2}{2} = (-1)^{n+1} S_{n+1}$$

→l'hérédité est vérifiée.

Par récurrence, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $C_n = (-1)^n \times S_n$.

Exercice 1E.6 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$*, montrer que* $S_n = \sum_{k=1}^{n} k \times k! = (n+1)! - 1$.

Initialisation : Pour $n=1$: $S_1 = \sum_{k=1}^{1} k \times k! = 1 \times 1! = 1$ et $(1+1)! - 1 = 2 - 1 = 1 = S_1$

→l'initialisation est vérifiée

Hérédité : supposons qu'il existe un entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $S_n = (n+1)! - 1$

→cela implique-t-il que $S_{n+1} = ((n+1)+1)! - 1 = (n+2)! - 1$?

Par définition :

$$S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} k \times k! = \sum_{k=1}^{n} k \times k! + (n+1) \times (n+1)! = S_n + (n+1) \times (n+1)!$$

En injectant l'hypothèse de l'hérédité :

$S_{n+1}=(n+1)!-1+(n+1)\times(n+1)!=(n+1)!\left[1+(n+1)\right]-1=(n+1)!\times(n+2)-1=(n+2)!-1$

→l'hérédité est vérifiée.

Par récurrence, pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, $S_n=\sum_{k=1}^{n}k\times k!=(n+1)!-1$.

Exercice 1E.7 :

La suite u est définie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par : $\begin{cases}u_1=1\\ u_{n+1}=u_n+\dfrac{1}{n(n+1)}\end{cases}$.

1) *En remarquant que $\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$, trouver une formule explicite de u.*

Ainsi : $\begin{cases}u_1=1\\ u_{n+1}=u_n+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\end{cases}$.

On obtient :

$$\begin{aligned}u_{n+1}&=u_n+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=u_{n-1}+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=u_{n-2}+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=u_1+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=u_1+1-\frac{1}{n+1}=1+1-\frac{1}{n+1}=2-\frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

Ainsi, il semble que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=2-\dfrac{1}{n}$

2) *Démontrer cette formule par récurrence.*

Initialisation : Pour $n=1$: $2-\dfrac{1}{1}=1=u_1$

→l'initialisation est vérifiée.

Hérédité : supposons qu'il existe un entier naturel $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $u_n=2-\dfrac{1}{n}$

→cela implique-t-il que $u_{n+1}=2-\dfrac{1}{n+1}$?

Par définition puis en injectant l'hypothèse de l'hérédité :

$u_{n+1}=u_n+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}=2-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}=2-\dfrac{1}{n+1}$

→l'hérédité est vérifiée

Par récurrence, pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=2-\dfrac{1}{n}$.