Exercices sur le raisonnement par récurrence

<u>Exercice 1F.1 :</u>

Un roi distribue des pièces d'or à ses ministres. Au premier ministre, il donne cinq pièces, au second ministre, il donne le double du premier moins deux pièces, au troisième ministre, il donne le double du second moins trois pièces et ainsi de suite …

1) Pour tout entier $n \geq 1$, exprimer a_{n+1} en fonction de a_n.
2) Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, $a_n = 2^n + n + 2$.
3) Combien de pièces d'or recevra le 10ème ministre ?

<u>Exercice 1F.2 :</u>

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel *n*, $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n^2}$.

1) Calculer les quatre premiers termes de la suite.
2) Conjecturer l'expression de u_n en fonction de *n*.
3) Démontrer cette conjecture.

<u>Exercice 1F.3 :</u>

1) Démontrer que pour tout réel x, on a : $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1+\cos x}{2}$.
2) Soit la suite u définie par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}$.

   Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$.

<u>Exercice 1F.4 :</u> ***(corrigé incomplet)***

On se propose de construire une suite telle que $u_1 = 1$ et, pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$u_{2n} = u_{2n+1} = 2u_n .$$

a) Montrer par récurrence que ces formules permettent de calculer u_n pour tout *n*.
b) Montrer par récurrence que pour tout *n*, u_n est une puissance de 2.
c) Montrer par récurrence que (u_n) est une suite croissante.
d) Montrer par récurrence que $u_{2^n} = 2^n$.
e) Montrer par récurrence que, pour $2^n \leq m < 2^{n+1}$, $u_m = 2^n$.
f) Etablir que la suite ainsi fabriquée répond bien à la question.

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. Quet

Exercice 1F.1 :

Un roi distribue des pièces d'or à ses ministres. Au premier ministre, il donne cinq pièces, au second ministre, il donne le double du premier moins deux pièces, au troisième ministre, il donne le double du second moins trois pièces et ainsi de suite …

1) *Pour tout entier $n \geq 1$, exprimer a_{n+1} en fonction de a_n.*

$$a_{n+1} = 2a_n - (n+1).$$

2) *Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, $a_n = 2^n + n + 2$.*

Initialisation :

Pour le premier ministre : $2^1 + 1 + 2 = 5 = a_1$: la proposition est initialisée.

Hérédité :

Supposons qu'il existe un rang $n \in \mathbb{N}^*$ tel que : $a_n = 2^n + n + 2$.

→est-ce que $a_{n+1} = 2^{n+1} + (n+1) + 2 = 2^{n+1} + n + 3$?

Par définition, puis en injectant l'hypothèse :

$$a_{n+1} = 2a_n - (n+1) = 2\left(2^n + n + 2\right) - n - 1 = 2^{n+1} + 2n + 4 - n - 1 = 2^{n+1} + n + 3.$$

L'hérédité est vérifiée.

Par récurrence, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$: $a_n = 2^n + n + 2$.

3) *Combien de pièces d'or recevra le 10ème ministre ?*

$$a_{10} = 2^{10} + 10 + 2 = 1036$$

Le 10ème ministre recevra 1036 pièces d'or.

Exercice 1F.2 :

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{2 + {u_n}^2}$.

1) *Calculer les quatre premiers termes de la suite.*

$$u_1 = \sqrt{2 + {u_0}^2} = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$$
$$u_2 = \sqrt{2 + {u_1}^2} = \sqrt{2+3} = \sqrt{5}$$
$$u_3 = \sqrt{2 + {u_2}^2} = \sqrt{2+5} = \sqrt{7}$$
$$u_4 = \sqrt{2 + {u_3}^2} = \sqrt{2+7} = \sqrt{9}$$

2) *Conjecturer l'expression de u_n en fonction de n.*

Il semble que pour tout entier naturel n, $u_n = \sqrt{2n+1}$

3) *Démontrer cette conjecture.*

Initialisation : $\sqrt{2 \times 0 + 1} = \sqrt{1} = 1 = u_0$: l'initialisation est vérifiée.

Hérédité : Supposons qu'il existe un rang $n \in \mathbb{N}$ tel que : $u_n = \sqrt{2n+1}$.

→est-ce que $u_{n+1} = \sqrt{2(n+1)+1} = \sqrt{2n+3}$?

Par définition, puis en injectant l'hypothèse :

$$u_{n+1} = \sqrt{2 + {u_n}^2} = \sqrt{2 + \left(\sqrt{2n+1}\right)^2} = \sqrt{2 + 2n + 1} = \sqrt{2n+3}$$: l'hérédité est vérifiée.

Par récurrence, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \sqrt{2n+1}$.

Exercice 1F.3 :

1) *Démontrer que pour tout réel x, on a :* $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 + \cos x}{2}$.

La relation :

$$\cos(x+x)=\cos x\times\cos x-\sin x\times\sin x$$
$$\Leftrightarrow\ \cos(2x)=\cos^2 x-\sin^2 x=\cos^2 x-\left(1-\cos^2 x\right)=2\cos^2 x-1$$
$$\Leftrightarrow\ 1+\cos(2x)=2\cos^2 x$$
$$\Leftrightarrow\ \cos^2 x=\frac{1+\cos(2x)}{2}$$

En posant $\mathrm{X}=2x \Leftrightarrow x=\frac{\mathrm{X}}{2}$, on obtient pour tout réel X :

$$\cos^2\left(\frac{\mathrm{X}}{2}\right)=\frac{1+\cos(\mathrm{X})}{2}$$

2) *Soit la suite u définie par $u_0=-1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}$.*

Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n=\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$.

Initialisation : $u_0=-1$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2^0}\right)=\cos(\pi)=-1$ donc $u_0=\cos\left(\frac{\pi}{2^0}\right)$: l'initialisation est vérifiée.

Hérédité : Supposons qu'il existe un rang $n\in\mathbb{N}$ tel que : $u_n=\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$.

→cela implique-t-il $u_{n+1}=\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$?

Par définition :

$$u_{n+1}=\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}$$

Ainsi d'après l'hypothèse :

$$u_{n+1}=\sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{2}}.$$

Or pour tout réel X :

$$\cos^2\left(\frac{\mathrm{X}}{2}\right)=\frac{1+\cos(\mathrm{X})}{2}\ \Leftrightarrow\ \cos\mathrm{X}=2\cos^2\left(\frac{\mathrm{X}}{2}\right)-1,$$

donc : $$u_{n+1}=\sqrt{\frac{1+\left(2\cos^2\left(\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2^n}\right)-1\right)}{2}}=\sqrt{\frac{2\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{2}}=\sqrt{\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}=\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$$

en ne retenant que la solution positive car par définition : $u_{n+1}=\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}$.

Ainsi l'hérédité est vérifiée.

Par récurrence, pour tout entier $n\in\mathbb{N}$: $u_n=\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$.

Exercice 1F.4 :

On se propose de construire une suite telle que $u_1=1$ et, pour tout entier naturel $n\geq 1$:

$$u_{2n}=u_{2n+1}=2u_n.$$

a) *Montrer par récurrence que ces formules permettent de calculer u_n pour tout n.*

Initialisation : $u_1 = 1 = u_{2\times0+1} = 1$, u_2 n'est pas directement calculable, mais :

$u_3 = u_{2\times1+1} = 2\times u_1 = 2\times1 = 2$: l'initialisation est vérifiée

Hérédité : Supposons qu'il existe un rang $n \in \mathbb{N}^*$ tel que u_n existe

→cela implique-t-il que u_{n+1} existe ?

Si n est pair et non nul, la relation $u_{2n} = u_{2n+1}$ implique que son suivant u_{n+1} existe et est égal à son précédent.

Si n est impair et supérieur à 1, la relation $u_{2n} = u_{2n+1}$ implique que son précédent d'indice pair existe :

si u_{2n+1} existe, son suivant est $u_{2n+2} = 2u_{n+1}$ donc il existe aussi.

b) *Montrer par récurrence que pour tout n, u_n est une puissance de 2.*

Initialisation : $u_1 = 1 = 2^0$: l'initialisation est vérifiée

Hérédité : Supposons qu'il existe un rang $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_n = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$.

→cela implique-t-il que $u_{n+1} = 2^{k'}$, $k' \in \mathbb{N}$?

Si n est pair : $u_{n+1} = u_n = 2^k$: son suivant est aussi une puissance de 2.

Si n est impair : son précédent est pair et s'écrit : $u_{n-1} = u_n = 2^k = 2\times u_{\frac{n-1}{2}}$.

il existe un entier k tel que $u_{n+1} = u_{2k}$; ainsi :

$$u_{n+1} = u_{2k} = 2u_k = 2\times2^k = 2^{k+1}$$

………… *(à suivre, en raisonnant sur des divisions successives)*

c) *Montrer par récurrence que (u_n) est une suite croissante.*

Les termes impairs étant égaux aux rangs pairs, comparons :

$$u_{2n+2} - u_{2n} = 2(u_{n+1} - u_n)$$

Si n est pair : $u_{n+1} - u_n = 0$ et $u_{2n+2} - u_{2n} = 0$

Si n est impair : $u_{n+1} - u_n = u_{n+1} - u_{n-1}$

………… (à suivre)

d) Montrer par récurrence que $u_{2^n} = 2^n$.

Initialisation : $u_{2^0} = u_1 = 1 = 2^0$: l'initialisation est vérifiée

Hérédité : Supposons qu'il existe un rang $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_{2^n} = 2^n$, $k \in \mathbb{N}$.

→cela implique-t-il que $u_{2^{n+1}} = 2^{n+1}$, $k' \in \mathbb{N}$?

On a, par définition :

$$u_{2^{n+1}} = u_{2\times2^n} = 2\times u_{2^n}$$

Or par hypothèse :

$$u_{2^n} = 2^n$$

Ainsi : $u_{2^{n+1}} = 2\times2^n = 2^{n+1}$

L'hérédité est vérifiée.

Par récurrence, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{2^n} = 2^n$.

e) Montrer par récurrence que, pour $2^n \le m < 2^{n+1}$, $u_m = 2^n$.

f) Etablir que la suite ainsi fabriquée répond bien à la question.