Fractions continues généralisées : Exercices sur les sommes infinies (certaines sont de Ramanujan)

<u>Exercice 1 :</u> Montrer que $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...=2$.

<u>Exercice 2 :</u> Montrer que $\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{1+...}}}}}=3$. (Ramanujan)

<u>Exercice 3 :</u> Calculer $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+...}}}}}$. (Ramanujan)

<u>Exercice 4 :</u> Calculer $\cfrac{2}{3-\cfrac{2}{3-\cfrac{2}{3-\cfrac{2}{3-...}}}}$. (Ramanujan)

<u>Exercice 5 :</u> Montrer que $2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+...}}}}=\sqrt{8}$. (Ramanujan)

<u>Exercice 6 :</u> Calculer $10\sqrt{10\sqrt{10\sqrt{10\sqrt{...}}}}$

<u>Exercice 7 :</u> Calculer $3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{...}}}}=$

<u>Exercice 8 :</u> Calculer $10\sqrt[n]{10\sqrt[n]{10\sqrt[n]{10\sqrt[n]{...}}}}=$

<u>Exercice 9 :</u> Calculer $10\sqrt[2]{10\sqrt[3]{10\sqrt[4]{10\sqrt[5]{...}}}}=$

<u>Exercice 10 :</u> Justifier que : $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+...}}}}}=\Phi$ (formule connue des Grecs)

<u>Exercice 11 :</u> Calculer $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...}}}}}$. (variante)

<u>Exercice 12 :</u> Calculer $\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+...}}}}}$.

<u>Exercice 13 :</u>

Démontrer cette formule connue des Grecs : $\Phi=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{...}}}}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Exercice 14 : Justifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-...+(-1)^n\times\frac{1}{n}=\ln 2$

Exercice 15 : Justifier que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$

Exercice 16 : Justifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-...+\frac{1}{n!}=e$

Exercice 17 : Justifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}=1+\sum\limits_{i=1}^{+\infty}\frac{x^i}{i!}=e^x$

Exercice 18 : Justifier que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}-...+\frac{1}{2n}=\ln 2$

Exercice 19 :

1) Justifier que la somme $\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{4+\sqrt{5+...}}}}}$ existe.
2) Déterminer cette somme à l'aide d'un programme python.

Exercice 20 :

Etudier la suite $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n^2}{n^3+k^2}$

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. Quet

Exercice 1 : Montrer que $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...=2$. (somme des termes d'une suite géométrique)

On définit la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0=1$$

$$u_1=1+\frac{1}{2}=\frac{2}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}=\frac{4-1}{2^1}=\frac{2^2-1}{2^1}$$

$$u_2=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{2}+\frac{1}{4}=\frac{6}{4}+\frac{1}{4}=\frac{7}{4}=\frac{8-1}{4}=\frac{2^3-1}{2^2}$$

$$u_3=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{4}+\frac{1}{8}=\frac{14}{8}+\frac{1}{8}=\frac{15}{8}=\frac{16-1}{8}=\frac{2^4-1}{2^3}$$

On peut alors supposer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de la forme : $u_n=\frac{2^{n+1}-1}{2^n}$.

Démonstration par récurrence :

Initialisation : $\frac{2^{0+1}-1}{2^0}=\frac{2-1}{1}=1=u_0$: l'initialisation est vérifiée

Hérédité : supposons qu'il existe un entier naturel n tel que $u_n=\frac{2^{n+1}-1}{2^n}$

→est-ce que $u_{n+1}=\frac{2^{n+2}-1}{2^{n+1}}$?

Par hypothèse : $u_n=\frac{2^{n+1}-1}{2^n}$

Donc $u_{n+1}=u_n+\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{2^{n+1}-1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{\left(2^{n+1}-1\right)\times 2}{2^n\times 2}+\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{2^{n+2}-2}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{2^{n+2}-1}{2^{n+1}}$

L'hérédité est vérifiée.

Par récurrence, pour tout entier naturel n, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de la forme : $u_n=\frac{2^{n+1}-1}{2^n}$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2^{n+1}-1}{2^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2^{n+1}}{2^n}-\frac{1}{2^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}2-\frac{1}{2^n}=2$.

Ainsi : $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...=2$

Exercice 2 : Montrer que $\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{1+...}}}}}=3$. (Démonstration de Ramanujan)

$$3=\sqrt{9}=\sqrt{1+8}=\sqrt{1+2\times 4}=\sqrt{1+2\times\sqrt{16}}=\sqrt{1+2\times\sqrt{1+15}}=\sqrt{1+2\times\sqrt{1+3\times 5}}=\sqrt{1+2\times\sqrt{1+3\times\sqrt{25}}}$$

$$=\sqrt{1+2\times\sqrt{1+3\times\sqrt{1+24}}}=\sqrt{1+2\times\sqrt{1+3\times\sqrt{1+4\times 6}}}=\sqrt{1+2\times\sqrt{1+3\times\sqrt{1+4\times\sqrt{36}}}}$$

$$=\sqrt{1+2\times\sqrt{1+3\times\sqrt{1+4\times\sqrt{1+35}}}}=\sqrt{1+2\times\sqrt{1+3\times\sqrt{1+4\times\sqrt{1+5\times 7}}}}$$

$$=\sqrt{1+2\times\sqrt{1+3\times\sqrt{1+4\times\sqrt{1+5\times\sqrt{49}}}}}=\sqrt{1+2\times\sqrt{1+3\times\sqrt{1+4\times\sqrt{1+5\times\sqrt{1+48}}}}}$$

$$=\sqrt{1+2\times\sqrt{1+3\times\sqrt{1+4\times\sqrt{1+5\times\sqrt{1+6\times 8}}}}}=..........$$

Mais cette méthode n'est pas parfaite : recommençons le même principe en partant du nombre 4 :

$$4=\sqrt{16}=\sqrt{1+15}=\sqrt{1+2\times\frac{15}{2}}=\sqrt{1+2\times\sqrt{\frac{225}{4}}}=\sqrt{1+2\times\sqrt{1+\frac{221}{4}}}=\sqrt{1+2\times\sqrt{1+3\times\frac{221}{12}}}=\sqrt{1+2\times\sqrt{1+3\times\sqrt{\frac{48841}{144}}}}$$

Et en raisonnant à l'infini cette façon de raisonner, on retrouve la somme précédente qui vaut 3

Or 4 n'est pas égal à 3.

Exercice 3 :

Calculer $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+...}}}}}$. (Ramanujan)

On définit la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$u_0=\sqrt{1}=1$,

$u_1=\sqrt{1+u_0}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$,

$u_2=\sqrt{1+u_1}=\sqrt{1+\sqrt{2}}$,

Et pour tout entier naturel n :

$u_{n+1}=\sqrt{1+u_n}$

La somme cherchée est $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Etude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

1) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante :

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive.

$$u_{n+1}-u_n=\sqrt{1+u_n}-u_n$$

Soit la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\sqrt{1+x}-x$: *f* est dérivable sur $]-1;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-1=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{2\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1+x}}=\frac{1-2\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1+x}}$$

Le dénominateur est strictement positif, il faut étudier le signe du numérateur, en utilisant la croissance de la fonction racine carrée :

$$1-2\sqrt{1+x}>0 \iff 1>2\sqrt{1+x} \iff \frac{1}{2}>\sqrt{1+x} \iff \frac{1}{4}>1+x \iff \frac{1}{4}-1>x \iff -\frac{3}{4}>x$$

Donc si $x>-\frac{3}{4}$, la dérivée est négative et la fonction *f* est décroissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$ qui nous intéresse.

Or :

$$f(1,618)\simeq 0.$$

Donc si $u_n>1,618$: $u_{n+1}-u_n<0$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Donc si $u_n<1,618$: $u_{n+1}-u_n>0$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Les premiers termes calculés indiquent que la suite est croissante jusqu'à sa valeur limite environ égale à $1,618$.

2) **Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée :**

Cette somme de nombre et quantité positive $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+...}}}}}$ est elle-même positive :

Pour tout $n\geq 2$, $u_n>0$.

Soit M un majorant quelconque et un entier n :

$$u_n > M \iff \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}} > M$$
$$\iff 1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}} > M^2$$
$$\iff \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}} > M^2-1$$
$$\iff 1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}} > \left(M^2-1\right)^2$$
$$\iff \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}} > \left(M^2-1\right)^2-1$$
$$\iff \ldots\ldots$$
$$\iff 0 > \left[\left(\left(M^2-1\right)^2-1\right)^2-1\right]^2-1\ldots\ldots$$

Cette condition ne peut être vérifiée, la suite est majorée.

3) Toute suite croissante majorée converge vers une limite L vérifiant :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = L$$

Or $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$ donc $L = \sqrt{1+L} \iff L^2 = 1+L \iff L^2 - L - 1 = 0$.

$\Delta = 5$ et les solutions sont $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

En retenant la solution positive, on conserve le nombre d'or :

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Exercice 4 : Calculer $\dfrac{2}{3-\dfrac{2}{3-\dfrac{2}{3-\dfrac{2}{3-\ldots}}}}$. (Ramanujan)

On définit la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = \frac{2}{3} = \frac{2^2-2}{2^2-1} \quad ,$$

$$u_1 = \frac{2}{3-u_0} = \frac{2}{3-\frac{2}{3}} = \frac{2}{\frac{9}{3}-\frac{2}{3}} = \frac{2}{\frac{7}{3}} = 2\times\frac{3}{7} = \frac{6}{7} = \frac{2^3-2}{2^3-1} \ ,$$

$$u_2 = \frac{2}{3-u_1} = \frac{2}{3-\frac{6}{7}} = \frac{2}{\frac{21}{7}-\frac{6}{7}} = \frac{2}{\frac{15}{7}} = 2\times\frac{7}{15} = \frac{14}{15} = \frac{2^4-2}{2^4-1} \ ,$$

$$u_3 = \frac{2}{3-u_2} = \frac{2}{3-\frac{14}{15}} = \frac{2}{\frac{45}{15}-\frac{14}{15}} = \frac{2}{\frac{31}{15}} = 2\times\frac{15}{31} = \frac{30}{31} = \frac{2^5-2}{2^5-1} \ ,$$

$$u_4 = \frac{2}{3-u_3} = \frac{2}{3-\frac{30}{31}} = \frac{2}{\frac{93}{31}-\frac{30}{31}} = \frac{2}{\frac{63}{31}} = 2\times\frac{31}{63} = \frac{62}{63} = \frac{2^6-2}{2^6-1}$$

Et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1}=\frac{2}{3-u_n}$$

La somme cherchée est $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

TROIS METHODES :

1) **Avec une récurrence :**

Montrons que pour tout entier naturel n, $u_n=\frac{2^{n+2}-2}{2^{n+2}-1}$.

Initialisation : $\frac{2^{0+2}-2}{2^{0+2}-1}=\frac{4-2}{4-3}=\frac{2}{3}=u_0$: l'initialisation est vérifiée

Hérédité : supposons qu'il existe un entier naturel n tel que $u_n=\frac{2^{n+2}-2}{2^{n+2}-1}$

→est-ce que $u_{n+1}=\frac{2^{n+3}-2}{2^{n+3}-1}$?

Par hypothèse : $u_n=\frac{2^{n+2}-2}{2^{n+2}-1}$

$$u_{n+1}=\frac{2}{3-u_n}=\frac{2}{3-\frac{2^{n+2}-2}{2^{n+2}-1}}=\frac{2}{\frac{3\left(2^{n+2}-1\right)}{2^{n+2}-1}-\frac{2^{n+2}-2}{2^{n+2}-1}}=\frac{2}{\frac{3\times2^{n+2}-3}{2^{n+2}-1}-\frac{2^{n+2}-2}{2^{n+2}-1}}$$

$$=\frac{2}{\frac{3\times2^{n+2}-3-2^{n+2}+2}{2^{n+2}-1}}=\frac{2}{\frac{2\times2^{n+2}-1}{2^{n+2}-1}}=2\times\frac{2^{n+2}-1}{2\times2^{n+2}-1}=\frac{2^{n+3}-2}{2^{n+3}-1}$$

L'hérédité est vérifiée.

Par récurrence, pour tout entier naturel n, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de la forme : $u_n=\frac{2^{n+2}-2}{2^{n+2}-1}$.

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2^{n+2}-2}{2^{n+2}-1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2^{n+2}\left(1-\frac{2}{2^{n+2}}\right)}{2^{n+2}\left(1-\frac{1}{2^{n+2}}\right)}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1-\frac{2}{2^{n+2}}}{1-\frac{1}{2^{n+2}}}=1.$

Donc : $\dfrac{2}{3-\dfrac{2}{3-\dfrac{2}{3-\dfrac{2}{3-\ldots}}}}=1$

2) **Avec une étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $u_n=\frac{2^{n+2}-2}{2^{n+2}-1}$**

a) Montrer que pour tout entier naturel n, $0\le u_n\le1$

Initialisation : $u_0=\frac{2}{3}$ donc $0\le u_0\le1$

Hérédité : supposons qu'il existe un entier naturel n tel que $0\le u_n\le1$

→est-ce que $0\le u_{n+1}\le1$?

Par hypothèse :

$$0\le u_n\le 1 \iff 0\ge -u_n\ge -1 \iff 3\ge 3-u_n\ge 2 \iff \frac{1}{3}\le\frac{1}{3-u_n}\le\frac{1}{2} \iff \frac{2}{3}\le\frac{2}{3-u_n}\le\frac{2}{2}$$

Donc $0\le u_{n+1}\le 1$ et l'hérédité est vérifiée.

Par récurrence, pour tout entier naturel n , $0\le u_n\le 1$

b) Etude des variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$u_{n+1}-u_n=\frac{2}{3-u_n}-u_n=\frac{2}{3-u_n}-\frac{u_n(3-u_n)}{3-u_n}=\frac{2}{3-u_n}-\frac{3u_n-u_n{}^2}{3-u_n}=\frac{2-3u_n+u_n{}^2}{3-u_n}=\frac{u_n{}^2-3u_n+2}{3-u_n}$$

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{3-x}$: f est dérivable sur $]3;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{(2x-3)(3-x)-(x^2-3x+2)\times(-1)}{(3-x)^2}=\frac{6x-2x^2-9+3x+x^2-3x+2}{(3-x)^2}=\frac{-x^2+6x-7}{(3-x)^2}$$

Le dénominateur est strictement positif, il faut étudier le signe du numérateur :

$\Delta=36-28=8$ et les solutions sont $\dfrac{-6-\sqrt{8}}{2\times(-1)}=3+\sqrt{2}$ et $\dfrac{-6+\sqrt{8}}{2\times(-1)}=3-\sqrt{2}$.

$a=-1$ donc le polynôme est orienté vers le bas :

si $0\le x\le 1$, la dérivée est négative et la fonction f est décroissante.

Or $f(0)=\dfrac{0^2-3\times 0+2}{3-0}=\dfrac{2}{3}$ et $f(1)=\dfrac{1^2-3\times 1+2}{3-1}=\dfrac{0}{2}=0$

Donc si $0\le x\le 1$, $f(x)\ge 0$ d'où : $u_{n+1}-u_n\ge 0$: la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

c) Etude de la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée, elle converge vers une limite L vérifiant :

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}u_{n+1}=L$$

D'où : $L=\dfrac{2}{3-L} \iff L(3-L)=2 \iff 3L-L^2-2=0 \iff -L^2+3L-2=0$

$\Delta=9-8=1$ et les solutions sont $\dfrac{-3-1}{2\times(-1)}=2$ et $\dfrac{-3+1}{2\times(-1)}=1$.

Pour tout entier naturel n , $0\le u_n\le 1$, ainsi la limite est 1 et :

$$\cfrac{2}{3-\cfrac{2}{3-\cfrac{2}{3-\cfrac{2}{3-\dots}}}}=1$$

3) En admettant que pour tout entier naturel n $\begin{cases} u_0=\dfrac{2}{3} \\ u_{n+1}=\dfrac{2}{3-u_n}\end{cases}$ et que la suite converge vers une limite L :

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}u_{n+1}=\mathrm{L}$$

$\iff \mathrm{L}=\dfrac{2}{3-\mathrm{L}}$

$\iff -\mathrm{L}^2+3\mathrm{L}=2$

$\iff \mathrm{L}^2-3\mathrm{L}+2=0$

$\Delta = 9-8=1$, on obtient deux racines : 1 et 2.

Par récurrence :

Initialisation : $u_0 = \frac{2}{3}$ donc $0 \le u_0 \le 1$

Hérédité : Supposons qu'il existe un rang n tel que : $0 \le u_n \le 1$, cela implique-t-il $0 \le u_{n+1} \le 1$?

Exercice 5 : Montrer que $2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\dots}}}} = \sqrt{8}$. (Ramanujan)

On étudie séparément la fraction continue : $\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\dots}}}}$.

On définit la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}} = \cfrac{1}{\cfrac{5}{4}} = \frac{4}{5} \quad ,$$

$$u_1 = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+u_0}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{4}{5}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{24}{5}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{5}{24}} = \cfrac{1}{\cfrac{29}{24}} = \frac{24}{29} \quad ,$$

$$u_2 = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+u_1}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{24}{29}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{140}{29}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{29}{140}} = \cfrac{1}{\cfrac{169}{140}} = \frac{140}{169}$$

$$u_3 = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+u_2}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{140}{169}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{816}{169}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{169}{816}} = \cfrac{1}{\cfrac{985}{816}} = \frac{816}{985}$$

$$u_4 = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+u_3}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{816}{985}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{4756}{985}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{985}{4756}} = \cfrac{1}{\cfrac{5741}{4756}} = \frac{4756}{5741}$$

On remarque que : $4=2^2-0^2$, $24=5^2-1^2$, $140=12^2-2^2$, $816=29^2-5^2$, $4756=70^2-12^2$

Cela n'aboutit pas …

On définit la suite suivante pour tout entier naturel n $\begin{cases} u_0 = \frac{4}{5} \\ u_{n+1} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+u_n}} \end{cases}$ et on admet que cette suite converge vers une limite L, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \text{L}$$

$$\Leftrightarrow \quad L=\frac{1}{1+\frac{1}{4+L}}$$

$$\Leftrightarrow \quad L=\frac{1}{\frac{5+L}{4+L}}$$

$$\Leftrightarrow \quad L=\frac{4+L}{5+L}$$

$$\Leftrightarrow \quad L(5+L)=4+L$$

$$\Leftrightarrow \quad L^2+5L=4+L$$

$$\Leftrightarrow \quad L^2+4L-4=0$$

$\Delta=16+16=32$, on obtient deux racines :

$$\frac{-4-\sqrt{32}}{2}=\frac{-4-2\sqrt{8}}{2}=-2-\sqrt{8} \quad \text{et} \quad \frac{-4+\sqrt{32}}{2}=\frac{-4+2\sqrt{8}}{2}=-2+\sqrt{8}$$

On retient la solution positive :

$$\frac{1}{1+\frac{1}{4+\frac{1}{1+\frac{1}{4+\dots}}}}=-2+\sqrt{8} \Leftrightarrow 2+\frac{1}{1+\frac{1}{4+\frac{1}{1+\frac{1}{4+\dots}}}}=\sqrt{8}$$

Exercice 6 :

Calculer $10\sqrt{10\sqrt{10\sqrt{10\sqrt{\dots}}}}$

On définit la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0=10 \quad ,$$

$$u_1=10\sqrt{u_0}=10\times\sqrt{10}=10^{1+\frac{1}{2}}$$

$$u_2=10\sqrt{u_1}=10\times\sqrt{10^{1+\frac{1}{2}}}=10\times10^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}=10^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}=10^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}}$$

$$u_3=10\sqrt{u_2}=10\times\sqrt{10^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}}=10\times10^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}=10^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}=10^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}}$$

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n=10^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^n}}$.

Initialisation : $u_0=10=10^{\frac{1}{2^0}}$: l'initialisation est vérifiée

Hérédité : supposons qu'il existe un entier naturel n tel que $u_n=10^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^n}}$

→est-ce que $u_{n+1}=10^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}}$?

Par hypothèse : $u_n=10^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^n}}$

$$u_{n+1}=10\sqrt{u_n}=10\times\sqrt{10^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^n}}}=10\times10^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}}=10^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}}$$

L'hérédité est vérifiée.

Par récurrence, pour tout entier naturel n, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de la forme : $u_n = 10^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}}$.

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 10^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}}$.

Or on reconnait dans l'expression $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}$ la somme des termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{1}{2}$, ainsi :

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n} = 1\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$$

$0<\frac{1}{2}<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]=2$

La valeur cherchée est :

$$10\sqrt{10\sqrt{10\sqrt{10\sqrt{\ldots}}}} = \lim_{n\to+\infty} 10^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}} = 10^2 = 100$$

AUTRE METHODE :

Soit X une valeur vérifiant la relation :

$$X = 10\sqrt{X} \iff X^2 = 100X$$

On remarque que l'équation : $X^2-100X=0$ possède deux solutions :

$$X(X-100)=0 \iff S=\{0;100\}$$

En remplaçant successivement par récurrence X par $10\sqrt{X}$, on obtient :

$$\begin{aligned} X &= 10\sqrt{X} \\ &= 10\sqrt{10\sqrt{X}} \\ &= 10\sqrt{10\sqrt{10\sqrt{X}}} \\ &= 10\sqrt{10\sqrt{10\sqrt{\ldots}}} \end{aligned}$$

En retenant la solution non nulle, on peut conclure :

$$10\sqrt{10\sqrt{10\sqrt{10\sqrt{\ldots}}}} = 100$$

Exercice 7 :

Calculer $3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{\ldots}}}} =$

On définit la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 3\sqrt{5} = 3^1\times 5^{\frac{1}{2}} \quad ,$$

$$u_1 = 3\sqrt{5\sqrt{u_0}} = 3\times\sqrt{5\times\sqrt{3^1\times 5^{\frac{1}{2}}}} = 3\times\sqrt{\sqrt{3}}\times\sqrt{5\times\sqrt{5^{\frac{1}{2}}}} = 3^{1+\frac{1}{4}}\times 5^{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}}$$

$$u_2 = 3\sqrt{5\sqrt{u_1}} = 3\times\sqrt{5\times\sqrt{3^{1+\frac{1}{4}}\times 5^{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}}}} = 3\times\sqrt{\sqrt{3^{1+\frac{1}{4}}}}\times\sqrt{5\times\sqrt{5^{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}}}} = 3^{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}}\times 5^{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}}$$

$$u_3 = 3\sqrt{5\sqrt{u_2}} = 3\times\sqrt{5\times\sqrt{3^{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}}\times 5^{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}}}} = 3^{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}}\times 5^{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\frac{1}{128}}$$

→on remarque que

$$u_3 = 3^{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}} \times 5^{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}\right)} = 3^{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}} \times 5^{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}\right)} = 3^{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}} \times \sqrt{5^{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}}}$$

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = 3^{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\ldots+\frac{1}{2^{2n}}} \times \sqrt{5^{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\ldots+\frac{1}{2^{2n}}}}$.

Initialisation : $u_0 = 3\sqrt{5} = 3^{\frac{1}{2^0}} \times \sqrt{5^{\frac{1}{2^0}}}$: l'initialisation est vérifiée

Hérédité : supposons qu'il existe un entier naturel n tel que $u_n = 3^{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\ldots+\frac{1}{2^{2n}}} \times \sqrt{5^{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\ldots+\frac{1}{2^{2n}}}}$

→est-ce que $u_{n+1} = 3^{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\ldots+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{2^{2n+2}}} \times \sqrt{5^{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\ldots+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{2^{2n+2}}}}$?

Par hypothèse : $u_n = 3^{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\ldots+\frac{1}{2^{2n}}} \times \sqrt{5^{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\ldots+\frac{1}{2^{2n}}}}$

$$u_{n+1} = 3\sqrt{5\sqrt{u_n}} = 3\sqrt{5\sqrt{3^{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\ldots+\frac{1}{2^{2n}}} \times \sqrt{5^{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\ldots+\frac{1}{2^{2n}}}}}}$$

$$= 3\times\sqrt{\sqrt{3^{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\ldots+\frac{1}{2^{2n}}}}} \times \sqrt{5\sqrt{\sqrt{5^{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\ldots+\frac{1}{2^{2n}}}}}}$$

$$= 3^{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\ldots+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{2^{2n+2}}} \times \sqrt{5^{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\ldots+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{2^{2n+2}}}}$$

L'hérédité est vérifiée.

Par récurrence, pour tout entier naturel n, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de la forme :

$$u_n = 3^{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\ldots+\frac{1}{2^{2n}}} \times \sqrt{5^{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\ldots+\frac{1}{2^{2n}}}}.$$

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 3^{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\ldots+\frac{1}{2^{2n}}} \times \sqrt{5^{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\ldots+\frac{1}{2^{2n}}}}$.

Or on reconnait dans l'expression $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^{2n}}$ la somme des termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{1}{2^2}$, ainsi :

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^{2n}} = 1\times\frac{1-\left(\frac{1}{2^2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2^2}} = \frac{1-\left(\frac{1}{2^2}\right)^{n+1}}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\left[1-\left(\frac{1}{2^2}\right)^{n+1}\right]$$

$0 < \frac{1}{2^2} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2^2}\right)^{n+1} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4}{3}\left[1-\left(\frac{1}{2^2}\right)^{n+1}\right] = \frac{4}{3}$

La valeur cherchée est :

$$3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{\ldots}}}} = \lim_{n\to+\infty} 3^{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\ldots+\frac{1}{2^{2n}}} \times \sqrt{5^{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\ldots+\frac{1}{2^{2n}}}} = 3^{\frac{4}{3}} \times \sqrt{5^{\frac{4}{3}}}$$

$$= 3^{\frac{4}{3}} \times \sqrt{5^{\frac{2}{3}\times 2}} = 3^{\frac{4}{3}} \times \sqrt{\left(5^{\frac{2}{3}}\right)^2} = 3^{\frac{4}{3}} \times 5^{\frac{2}{3}}$$

Exercice 8 :

Calculer $10\sqrt[n]{10\sqrt[n]{10\sqrt[n]{10\sqrt[n]{\ldots}}}} =$

On définit la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 10 \quad ,$$

$$u_1 = 10\sqrt[n]{u_0} = 10\times 10^{\frac{1}{n}} = 10^{1+\frac{1}{n}}$$

$$u_2 = 10\sqrt[n]{u_1} = 10\times\left(10^{1+\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{n}} = 10^{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}$$

$$u_3 = 10\sqrt[n]{u_2} = 10\times\left(10^{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)^{\frac{1}{n}} = 10^{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}$$

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel k, $u_k = 10^{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\ldots+\frac{1}{n^k}}$, quel que soit l'entier n.

Initialisation : $u_0 = 10$ n'est pas significatif

$$u_1 = 10^{1+\frac{1}{n}} = 10^{1+\frac{1}{n^1}} \text{ : l'initialisation est vérifiée}$$

Hérédité : supposons qu'il existe un entier naturel k tel que $u_k = 10^{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\ldots+\frac{1}{n^k}}$

$\rightarrow$est-ce que $u_{k+1} = 10^{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\ldots+\frac{1}{n^k}+\frac{1}{n^{k+1}}}$?

Par hypothèse : $u_k = 10^{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\ldots+\frac{1}{n^k}}$

$$u_{k+1} = 10\sqrt[n]{u_k} = 10\times\left(10^{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\ldots+\frac{1}{n^k}}\right)^{\frac{1}{n}} = 10^{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\ldots+\frac{1}{n^k}+\frac{1}{n^{k+1}}}$$

L'hérédité est vérifiée.

Par récurrence, pour tout entier naturel k, $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est de la forme : $u_k = 10^{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\ldots+\frac{1}{n^k}}$.

Ainsi $\lim\limits_{k\to+\infty} u_k = \lim\limits_{k\to+\infty} 10^{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\ldots+\frac{1}{n^k}}$.

Or on reconnait dans l'expression $1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\ldots+\frac{1}{n^k}$ la somme des termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{1}{n}$, ainsi :

$$1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\ldots+\frac{1}{n^k} = 1\times\frac{1-\left(\frac{1}{n}\right)^{k+1}}{1-\frac{1}{n}} = \frac{n}{n-1}\left[1-\left(\frac{1}{n}\right)^{k+1}\right]$$

$$0<\frac{1}{n}<1 \text{ donc } \lim_{k\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{k+1} = 0 \quad\text{et}\quad \lim_{k\to+\infty}\frac{n}{n-1}\left[1-\left(\frac{1}{n}\right)^{k+1}\right] = \frac{n}{n-1}$$

La valeur cherchée est :

$$10\sqrt[n]{10\sqrt[n]{10\sqrt[n]{10\sqrt[n]{\ldots}}}} = \lim_{k\to+\infty} 10^{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\ldots+\frac{1}{n^k}} = 10^{\frac{n}{n-1}}$$

Exercice 9 :

Calculer $10\sqrt[2]{10\sqrt[3]{10\sqrt[4]{10\sqrt[5]{\ldots}}}} =$

On définit la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_1 = 10 \quad ,$$

$$u_2 = 10\sqrt[2]{10} = 10\sqrt[2]{u_1} = 10\times 10^{\frac{1}{2}} = 10^{1+\frac{1}{2}}$$

$$u_3 = 10\sqrt[2]{10\sqrt[3]{10}} = 10\times\sqrt[2]{10}\times\sqrt[2]{\sqrt[3]{10}} = u_2\times\left(10^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = 10^{1+\frac{1}{2}}\times 10^{\frac{1}{6}} = 10^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}} = 10^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\times3}}$$

$$u_4 = 10\sqrt[2]{10\sqrt[3]{10\sqrt[4]{10}}} = u_3\times\sqrt[2]{\sqrt[3]{\sqrt[4]{10}}} = 10^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}}\times\left(\left(10^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = 10^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}}\times 10^{\frac{1}{24}} = 10^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}}$$

On remarque que :

$$u_4 = 10^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}}$$

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = 10^{1+\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\ldots+\frac{1}{2\times3\times\ldots\times(n-1)\times n}}$.

Initialisation : $u_1 = 10$ n'est pas significatif

$u_2 = 10^{1+\frac{1}{2}} = 10^{1+\frac{1}{1\times2}}$: l'initialisation est vérifiée

Hérédité : supposons qu'il existe un entier naturel n tel que $u_n = 10^{1+\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\ldots+\frac{1}{2\times3\times\ldots\times(n-1)\times n}}$

→est-ce que $u_{n+1} = 10^{1+\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\ldots+\frac{1}{2\times3\times\ldots\times(n-1)\times n}+\frac{1}{2\times3\times\ldots\times(n-1)\times n\times(n+1)}}$?

Par hypothèse : $u_n = 10^{1+\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\ldots+\frac{1}{2\times3\times\ldots\times(n-1)\times n}}$

$$u_{n+1} = u_n\times\sqrt[2]{\ldots\sqrt[n]{\sqrt[n+1]{10}}} = 10^{1+\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\ldots+\frac{1}{2\times3\times\ldots\times(n-1)\times n}}\times 10^{\frac{1}{2\times3\times\ldots\times(n-1)\times n\times(n+1)}}$$

$$= 10^{1+\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\ldots+\frac{1}{2\times3\times\ldots\times(n-1)\times n}+\frac{1}{2\times3\times\ldots\times(n-1)\times n\times(n+1)}}$$

L'hérédité est vérifiée.

Par récurrence, pour tout entier naturel n, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de la forme : $u_n = 10^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}}$.

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 10^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}}$.

Or on sait que :

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!} = e$$

$$\Leftrightarrow\ 1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!} = e-1$$

Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 10^{e-1}$$

Exercice 10 :

Justifier que : $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}} = \Phi$

Par définition, le carré du nombre d'or est égal au nombre d'or augmenté de 1. Ainsi :

$$\Phi + 1 = \Phi^2 \quad \Leftrightarrow \quad \Phi = \sqrt{1+\Phi}$$

En remplaçant successivement par récurrence Φ par $\sqrt{1+\Phi}$, on obtient :

$$\begin{aligned}\Phi &= \sqrt{1+\Phi} \\ &= \sqrt{1+\sqrt{1+\Phi}} \\ &= \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\Phi}}} \\ &= \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\ldots}}}}\end{aligned}$$

Exercice 11 :

Calculer $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}}}$. (variante de Ramanujan)

Soit X une valeur vérifiant la relation :

$$X + 2 = X^2 \quad \Leftrightarrow \quad X = \sqrt{2+X}$$

On remarque que l'équation : $X^2 - X - 2 = 0$ possède un discriminant $\Delta = 9$ et deux racines :

$$X_1 = \frac{1+3}{2} = 2 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{1-3}{2} = -1$$

En remplaçant successivement par récurrence X par $\sqrt{2+X}$, on obtient :

$$\begin{aligned}X &= \sqrt{2+X} \\ &= \sqrt{2+\sqrt{2+X}} \\ &= \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+X}}} \\ &= \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots}}}}\end{aligned}$$

En retenant la solution positive, on peut conclure :

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots}}}} = 2$$

Exercice 12 :

Calculer $\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+\ldots}}}}}$.

Soit X une valeur vérifiant la relation :

$$X + 3 = X^2 \quad \Leftrightarrow \quad X = \sqrt{3+X}$$

On remarque que l'équation : $X^2 - X - 3 = 0$ possède un discriminant $\Delta = 13$ et deux racines :

$$X_1 = \frac{1-\sqrt{13}}{2} \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$$

En remplaçant successivement par récurrence X par $\sqrt{3+X}$, on obtient :

$$\begin{aligned} X &= \sqrt{3+X} \\ &= \sqrt{3+\sqrt{3+X}} \\ &= \sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+X}}} \\ &= \sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{\ldots}}}} \end{aligned}$$

En retenant la solution positive, on peut conclure :

$$\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{\ldots}}}} = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$$

Exercice 13 :

Démontrer cette formule connue des Grecs : $\Phi = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\ldots}}}}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

On définit la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 1 \ ,$$
$$u_1 = \frac{3}{2} \ ,$$
$$u_2 = \frac{5}{3}$$
$$u_3 = \frac{8}{5} \ ,$$
$$u_4 = \frac{13}{8} \ ,$$
$$u_5 = \frac{21}{13}$$

On reconnait les valeurs de la suite de Fibonnacci définie par :

$F_1 = 1$, $F_2 = 1$ et pour tout entier $n \geq 3$: $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

→ $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, $F_6 = 8$, …

Et pour tout entier naturel n :

$$u_n = \frac{F_{n+3}}{F_{n+2}}$$

La somme cherchée est $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$.

→cette limite est connue, il s'agit du nombre d'or.

Pour le démontrer, il faut d'abord admettre que cette limite existe, appelons-là L. Dans ce cas :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = L \iff \lim_{n\to+\infty} F_{n+1} = L \times \lim_{n\to+\infty} F_n .$$

Dans ce cas, la suite de Fibonnacci devient progressivement une suite géométrique de raison L :

→pour de grandes valeurs de n : $F_{n+1} \simeq L \times F_n$.

En reprenant la relation de Fibonnacci :

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n ,$$

On obtient pour de grandes valeurs de n :

$$L^2 \times F_n = L \times F + F_n$$

$$\Leftrightarrow \left(L^2 - L - 1\right) F_n = 0$$

Les termes de la suite de Fibonnacci étant non nuls pour $n \neq 0$, on doit résoudre :

$$L^2 - L - 1 = 0$$

Le discriminant $\Delta = 5$ et les racines sont :

$$L_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad L_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

La valeur positive donne la limite cherche, d'où :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Et
$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\dots}}}}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Exercice 14 : Justifier que $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^n \times \frac{1}{n} = \ln 2$

Pour $t \neq -1$, on considère l'expression :

$$1 - t + t^2 - \dots + (-1)^{n-1} \times t^{n-1}$$

On reconnait la somme des termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $-t$:

$$1 - t + t^2 - \dots + (-1)^{n-1} \times t^{n-1} = 1 \times \frac{1-(-t)^n}{1-(-t)} = \frac{1-(-t)^n}{1+t} = \frac{1}{1+t} - \frac{(-t)^n}{1+t}$$

On intègre les deux membres sur l'intervalle $[0;1]$:

$$\int_0^1 1 - t + t^2 - \dots + (-1)^{n-1} \times t^{n-1} dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt - \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} dt$$

$$\Leftrightarrow \left[t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \dots + (-1)^n \times \frac{t^n}{n} \right]_0^1 = \left[\ln(1+t) \right]_0^1 + (-1)^{n-1} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^n \times \frac{1}{n} = \ln 2 + (-1)^{n-1} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$$

Or $\forall t \in [0;1]$:

$$t^n \in [0;1] \quad \text{et} \quad 1 + t \geq 1$$

Donc $\forall t \in [0;1]$:

$$0 \leq \frac{t^n}{1+t} \leq t^n$$

En intégrant sur l'intervalle $[0;1]$:

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \leq \int_0^1 t^n dt$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \le \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,dt \le \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \le \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,dt \le \frac{1}{n+1}$$

Par passage à la limite :

$$\lim_{n\to+\infty} 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+(-1)^n\times\frac{1}{n}=\ln 2$$

Exercice 15 : Justifier que $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

$$\ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right] = n\times\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$$

→on pose : $h=\frac{1}{n}$, d'où :

$$\lim_{n\to+\infty}\ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right] = \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{h\to0}\frac{\ln(1+h)}{h}=1$$

Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} e^{\ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]} = e$$

Exercice 16 : Justifier que $\lim_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\ldots+\frac{1}{n!}=e$

Formule de développement :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\times a^{n-k}\times b^k = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!\times(n-k)!}\times a^{n-k}\times b^k$$

donc :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\times 1^{n-k}\times\left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!\times(n-k)!}\times\frac{1}{n^k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\times\frac{n!}{(n-k)!\times n^k}$$

On a montré précédemment que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Pour tout entier k :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{(n-k)!\times n^k} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n\times(n-1)\times\ldots\times(n-k+1)}{n^k}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n}\times\frac{n-1}{n}\times\ldots\times\frac{n-k+1}{n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} 1\times\left(1-\frac{1}{n}\right)\times\left(1-\frac{2}{n}\right)\times\ldots\times\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$
$$=1$$

Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\times\left[1\times\left(1-\frac{1}{n}\right)\times\left(1-\frac{2}{n}\right)\times\ldots\times\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right]$$
$$= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$$
$$=e$$

Exercice 17 : *Justifier que* $\lim_{n\to+\infty} 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}=1+\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{x^i}{i!}=e^x$

On pose la fonction :

$$f(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}-\ldots+\frac{x^n}{n!}$$

On constate que :

$$f(0)=1$$

Sa dérivée est :

$$f'(x)=0+1+\frac{2x}{2!}+\frac{3x^2}{3!}+\ldots+\frac{nx^{n-1}}{n!}$$
$$f'(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

On remarque que par passage à la limite :

$\lim_{n\to+\infty} f'(x)=\lim_{n\to+\infty} f(x)$ et on voit venir la fonction exponentielle car $f(0)=1$.

Dans notre étude, on obtient :

$$f'(x)=f(x)-\frac{x^n}{n!}$$
$$\Leftrightarrow\quad f(x)-f'(x)=\frac{x^n}{n!}.$$

Or :

$$\frac{x^n}{n!}=\frac{x\times x\times\ldots\times x}{1\times 2\times\ldots\times n}=\frac{x}{1}\times\frac{x}{2}\times\ldots\frac{x}{n}$$

x étant un réel donné, par passage à la limite, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x}{n}=0$$

et $$\lim_{n\to+\infty}\frac{x^n}{n!}=\lim_{n\to+\infty}\frac{x}{1}\times\frac{x}{2}\times\ldots\frac{x}{n}=0$$

Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} f(x)-f'(x)=0$$
$$\Leftrightarrow\quad \lim_{n\to+\infty} f(x)=\lim_{n\to+\infty} f'(x).$$

La fonction égale à sa dérivée et prenant la valeur 1 au point d'abscisse 0 est la fonction exponentielle :

$$\lim_{n\to+\infty} 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}=1+\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{x^i}{i!}=e^x$$

Exercice 18 : *Justifier que* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}-...+\frac{1}{2n}=\ln 2$

On définit la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par : $u_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}-...+\frac{1}{2n}$

$$u_1=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$
$$u_2=\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2+2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$$
$$u_3=\frac{1}{3+1}+\frac{1}{3+2}+\frac{1}{3+3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{37}{60}$$
$$u_4=\frac{1}{4+1}+\frac{1}{4+2}+\frac{1}{4+3}+\frac{1}{4+4}=\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}=\frac{533}{840}$$
$$u_5=\frac{1}{5+1}+\frac{1}{5+2}+\frac{1}{5+3}+\frac{1}{5+4}+\frac{1}{5+5}=\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}=\frac{1627}{2520}$$

Donc :

$$u_1=\frac{1}{2}=\frac{1}{1\times 2}=\frac{1}{2!}$$
$$u_2=\frac{7}{12}=\frac{14}{24}=\frac{14}{1\times2\times3\times4}=\frac{14}{4!}=\frac{4!-10}{4!}$$
$$u_3=\frac{37}{60}=\frac{444}{720}=\frac{444}{1\times2\times3\times4\times5\times6}=\frac{444}{6!}=\frac{6!-276}{6!}$$
$$u_4=\frac{533}{840}=\frac{25584}{8!}=\frac{8!-14736}{8!}$$

Et on pose : $u_n=$..................

Autre essai :

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}-...+\frac{1}{2n}=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-...+\frac{1}{2n}\right)-\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-...+\frac{1}{n}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-...+\frac{1}{2n}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-...+\frac{1}{2n}\right)$$
$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-...-\frac{1}{2n}$$

D'après l'exercice 14, cette somme vaut $\ln 2$ (Merci M. Jean Groeninger)

Autre essai :

On définit la fonction f sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+...+\frac{1}{2x} \quad \text{avec} \quad \int_0^1\frac{1}{x+1}dx=\left[\ln(x+1)\right]_0^1=\ln 2-\ln 1$$

f est intégrable et :

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+...+\frac{1}{2x}dx$$
$$=(\ln 2-\ln 1)+(\ln 3-\ln 2)+...+\int_0^1\frac{1}{2x}dx \text{ !!!!!!!!!!!}$$

$$\int_0^x f(x)\,dx=\int_0^x\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+...+\frac{1}{2x}dx \text{ !!!!!!!!!!!!!!!}$$

Avec Python :

```
S=0
n=int(input("Choisissez un rang :"))
for i in range(1,n+1):
    S += 1/(n+i)
print(S)
```

Pour n = 100 000 000 , on obtient : S = 0.6931471780597414

Exercice 19 :

1) *Justifier que la somme* $\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{4+\sqrt{5+...}}}}}$ *existe.*

On définit la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$u_1=\sqrt{1}$,

$u_2=\sqrt{1+\sqrt{2}}$,

$u_3=\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$,

…

Etude des variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:

→pour étudier le signe de $u_{n+1}-u_n$, on remarque que les derniers radicaux de u_n et u_{n+1} s'écrit :

$\sqrt{(n-1)+\sqrt{n}}$ et $\sqrt{(n-1)+\sqrt{n+\sqrt{n+1}}}$

Or $\sqrt{n+\sqrt{n+1}}>\sqrt{n}$ donc $u_{n+1}-u_n>0$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

D'autre part, on sait calculer $\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+...}}}}}$ pour tout entier positif n :

Soit X une valeur vérifiant la relation :

$X+n=X^2 \Leftrightarrow X=\sqrt{n+X}$

On remarque que l'équation : $X^2-X-n=0$ possède un discriminant $\Delta=1+4n$ et deux racines :

$X_1=\dfrac{1-\sqrt{1+4n}}{2}$ et $X_2=\dfrac{1+\sqrt{1+4n}}{2}$

En remplaçant successivement par récurrence X par $\sqrt{n+X}$, on obtient :

$$\begin{aligned}X&=\sqrt{n+X}\\&=\sqrt{n+\sqrt{n+X}}\\&=\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+X}}}\\&=\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{...}}}}\end{aligned}$$

En retenant la solution positive, on peut conclure :

$$\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{...}}}}=\frac{1+\sqrt{1+4n}}{2}$$

La somme $\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{...}}}}$ étant supérieure à la somme $\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{4+\sqrt{5+...}}}}}$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée, et toute suite croissante majorée converge et sa limite est unique.

2) *Déterminer cette somme à l'aide d'un programme python.*

Avec un programme python,

```
from math import *
```

```
n = int(input("Choisissez un rang :"))
S = sqrt(n)
for i in range(1,n):
    S = sqrt(n-i + S)
print(S)
```

on obtient, pour $n = 1000\,000$, une somme égale à 1.7579327566180045.

Exercice 20 :

Etudier la suite $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{n^3+k^2}$

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(n+1)^2}{(n+1)^3+k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{n^3+k^2}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(n+1)^2}{(n+1)^3+k^2} + \frac{(n+1)^2}{(n+1)^3+(n+1)^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{n^3+k^2}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{(n+1)^2}{(n+1)^3+k^2} - \frac{n^2}{n^3+k^2} \right) + \frac{(n+1)^2}{(n+1)^3+(n+1)^2}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{(n+1)^2}{(n+1)^3+k^2} - \frac{n^2}{n^3+k^2} \right) + \frac{1}{n+1+1}$$

Or : $$\frac{(n+1)^2}{(n+1)^3+k^2} - \frac{n^2}{n^3+k^2} = \frac{(n^2+2n+1)(n^3+k^2) - n^2(n^3+3n^2+3n+1+k^2)}{\left((n+1)^3+k^2\right)(n^3+k^2)}$$

$$= \frac{n^5+n^2k^2+2n^4+2nk^2+n^3+k^2-n^5-3n^4-3n^3-n^2-n^2k^2}{\left((n+1)^3+k^2\right)(n^3+k^2)}$$

$$= \frac{2nk^2+k^2-n^4-2n^3-n^2}{\left((n+1)^3+k^2\right)(n^3+k^2)}$$

$$= \frac{2nk^2+k^2-n^4-2n^3-n^2}{\left((n+1)^3+k^2\right)(n^3+k^2)}$$

………….. cette suite est croissante !!!

On remarque que : $\sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{n^3+k^2} \le n \times \frac{n^2}{n^3+1^2} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{n^3+k^2} \le \frac{n^3}{n^3+1^2}$

Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{n^3+1^2} = 1$: la suite est croissante majorée par 1, elle converge.