Exercices à prise d'initiative sur la récurrence

Exercice 1 :

On considère la somme définie pour tout $n \geq 1$ par :

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k \times (n-k).$$

Déterminer une forme explicite de S_n.

La suite converge-t-elle ? Justifier.

Exercice 2 :

Calculer : $$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\times\ldots\times\left(1-\frac{1}{2020^2}\right)$$

Exercice 3 :

Soit la suite (x_n) définie pour $n \geq 0$ par : $x_0 = 1$ et $x_n = \sum_{k=0}^{n-1} x_k$.

Calculer $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{x_k}$.

Exercice 4 : **(livret d'entrée de Louis Le Grand)**

Déterminer le plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} \geq 2022$.

Exercice 5 :

Montrer que : $$\frac{1}{3\times 4}+\frac{1\times 2}{3\times 4\times 5}+\frac{1\times 2\times 3}{3\times 4\times 5\times 6}+\ldots=\frac{1}{6}$$

Exercice 6 :

Soit le nombre qui s'écrit 11...155...56 avec, à droite le chiffre 6, puis au milieu 2020 fois le chiffre 5, et enfin 2021 fois le chiffre 1 à gauche. Sa racine carrée a le bon goût d'être un nombre entier. Saurez-vous calculer la somme des chiffres de celle-ci ?

Exercice 7 :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, a_2, \ldots, a_n$ n réels strictement positifs.

1. Vérifier que $\forall x > 0$: $x + \frac{1}{x} \geq 2$.
2. En déduire, par récurrence, que : $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\times\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right) \geq n^2$.

Exercice 1 :

On considère la somme définie pour tout $n \geq 1$ par :

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k \times (n-k).$$

Déterminer une forme explicite de S_n. La suite converge-t-elle ? Justifier.

$$S_1 = \frac{1}{1}\sum_{k=1}^{1} k \times (n-k) = 1 \times (1-1) = 0$$

$$S_2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2} k \times (n-k) = \frac{1}{2}\left[1\times(2-1)+2\times(2-2)\right] = \frac{1}{2}$$

$$S_3 = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{3} k \times (n-k) = \frac{1}{3}\left[1\times(3-1)+2\times(3-2)+3\times(3-3)\right] = \frac{4}{3}$$

$$S_4 = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4} k \times (n-k) = \frac{1}{4}\left[1\times(4-1)+2\times(4-2)+3\times(4-3)+4\times(4-4)\right] = \frac{10}{4}$$

$$S_5 = \frac{1}{5}\sum_{k=1}^{5} k \times (n-k) = \frac{1}{5}\left[1\times(5-1)+2\times(5-2)+3\times(5-3)+4\times(5-4)+5\times(5-5)\right] = \frac{20}{5}$$

$$S_6 = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} k \times (n-k) = \frac{1}{6}\left[1\times(6-1)+2\times(6-2)+3\times(6-3)+4\times(6-4)+5\times(6-5)+6\times(6-6)\right] = \frac{35}{6}$$

On remarque que :

$$S_1 = 0$$

$$S_2 = \frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{4-1}{6} = \frac{2^2-1}{6}$$

$$S_3 = \frac{4}{3} = \frac{8}{6} = \frac{9-1}{6} = \frac{3^2-1}{6}$$

$$S_4 = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = \frac{15}{6} = \frac{16-1}{6} = \frac{4^2-1}{6}$$

$$S_5 = \frac{20}{5} = 4 = \frac{24}{6} = \frac{25-1}{6} = \frac{5^2-1}{6}$$

$$S_6 = \frac{35}{6} = \frac{36-1}{6} = \frac{6^2-1}{6}$$

Il est possible que $S_n = \dfrac{n^2-1}{6}$, vérifions-le par récurrence :

Initialisation : $S_1 = 0$ et pour $n = 0$: $\dfrac{n^2-1}{6} = \dfrac{1^2-1}{6} = 0$

Hérédité : Supposons qu'il existe un rang $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $S_n = \dfrac{n^2-1}{6}$

→est-ce que $S_{n+1} = \dfrac{n^2-1}{6} = \dfrac{(n+1)^2-1}{6} = \dfrac{n^2+2n+1-1}{6} = \dfrac{n^2+2n}{6}$?

$$S_{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} k \times ((n+1)-k)$$

$$= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} k \times (n+1-k)$$

$$=\frac{1}{n+1}\left[\sum_{k=1}^{n}k\times(n+1-k)+(n+1)\times(n+1-(n+1))\right]$$ → avec $(n+1)\times(n+1-(n+1))=0$

$$=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}k\times(n+1-k)$$ →il faut faire apparaitre $S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k\times(n-k)$

$$=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\left[k\times(n-k)+k\times 1\right]$$

$$=\frac{1}{n+1}\left[\sum_{k=1}^{n}k\times(n-k)+\sum_{k=1}^{n}k\right]$$ → $\sum_{k=1}^{n}k=1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$

$$=\frac{1}{n+1}\left[\sum_{k=1}^{n}k\times(n-k)+\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}k\times(n-k)+\frac{1}{n+1}\times\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{1}{n+1}\times\frac{n}{n}\times\sum_{k=1}^{n}k\times(n-k)+\frac{n}{2}$$

$$=\frac{n}{n+1}\times\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k\times(n-k)+\frac{n}{2}$$ →on reconnait $S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k\times(n-k)$

$$=\frac{n}{n+1}\times S_n+\frac{n}{2}$$ →or par hypothèse : $S_n=\frac{n^2-1}{6}$

$$=\frac{n}{n+1}\times\frac{n^2-1}{6}+\frac{n}{2}$$

$$=\frac{n}{n+1}\times\frac{(n+1)(n-1)}{6}+\frac{n}{2}$$

$$=\frac{n(n-1)}{6}+\frac{n}{2}$$

$$=\frac{n^2-n}{6}+\frac{3n}{6}$$

$$=\frac{n^2+2n}{6}$$

et l'hédérité est vérifiée.

Par récurrence, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $S_n=\frac{n^2-1}{6}$

Exercice 2 :

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\times...\times\left(1-\frac{1}{2020^2}\right)=\left(\frac{2^2}{2^2}-\frac{1}{2^2}\right)\times\left(\frac{3^2}{3^2}-\frac{1}{3^2}\right)\times...\times\left(\frac{2020^2}{2020^2}-\frac{1}{2020^2}\right)$$

$$=\left(\frac{2^2-1^2}{2^2}\right)\times\left(\frac{3^2-1^2}{3^2}\right)\times...\times\left(\frac{2020^2-1^2}{2020^2}\right)$$

$$=\left(\frac{(2+1)(2-1)}{2^2}\right)\times\left(\frac{(3+1)(3-1)}{3^2}\right)\times...\times\left(\frac{(2020+1)(2020-1)}{2020^2}\right)$$

$$=\left(\frac{3\times 1}{2^2}\right)\times\left(\frac{4\times 2}{3^2}\right)\times\left(\frac{5\times 3}{4^2}\right)\times...\times\left(\frac{2020\times 2018}{2019^2}\right)\times\left(\frac{2021\times 2019}{2020^2}\right)$$

$$=\frac{3\times1\times4\times2\times5\times3\times\ldots\times2020\times2018\times2021\times2019}{2^2\times3^2\times4^2\times\ldots\times2020^2}$$
$$=\frac{3\times1\times4\times2\times5\times3\times\ldots\times2020\times2018\times2021\times2019}{2^2\times3^2\times4^2\times\ldots\times2020^2}$$
$$=\frac{1\times2\times3^2\times4^2\times\ldots\times2019^2\times2020\times2021}{2^2\times3^2\times4^2\times\ldots\times2020^2}$$
$$=\frac{2021}{2\times2020}$$
$$=\frac{2021}{4040}$$

Exercice 3 :

Soit la suite (x_n) *définie pour* $n\geq0$ *par :* $x_0=1$ *et* $x_n=\sum_{k=0}^{n-1}x_k$ *. Calculer* $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{x_k}$ *.*

Il est toujours utile de calculer les premiers de la suite (x_n) :

$$x_1=\sum_{k=0}^{1-1}x_k=x_0=1$$
$$x_2=\sum_{k=0}^{2-1}x_k=x_0+x_1=1+1=2$$
$$x_3=\sum_{k=0}^{3-1}x_k=x_0+x_1+x_2=1+1+2=4$$
$$x_4=\sum_{k=0}^{4-1}x_k=x_0+x_1+x_2+x_3=1+1+2+4=8$$

Ainsi : $$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{x_k}=\frac{1}{x_0}+\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\ldots.$$
$$=\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots.$$
$$=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots.$$

Or $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots.+\frac{1}{n}$ est la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de premier terme $v_0=1$ de raison $q=\frac{1}{2}$:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots.+\frac{1}{n}=1\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}}=2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$$

Or $0<\frac{1}{2}<1$ donc $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=0$ et $\lim_{n\to+\infty}1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots.+\frac{1}{n}=2$

En conclusion : $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{x_k}=3$

Exercice 4 : **(livret d'entrée de Louis Le Grand)**

Déterminer le plus petit entier $n\in\mathbb{N}^*$ *tel que* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}\geq 2022$.

On remarque que :

$$\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}\times\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}=\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{k-(k+1)}=\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{-1}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$$

Ainsi : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$

$$=\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\ldots+\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$$

$$=\left(-\sqrt{1}+\sqrt{2}\right)+\left(-\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+\ldots+\left(-\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)$$

Par télescopage : $=\sqrt{n+1}-1$

On doit résoudre l'inéquation :

$$\sqrt{n+1}-1\geq 2022$$

$$\Leftrightarrow\ \sqrt{n+1}\geq 2022+1$$

$$\Leftrightarrow\ \left(\sqrt{n+1}\right)^2\geq 2023^2$$

$$\Leftrightarrow\ n+1\geq 2023^2$$

$$\Leftrightarrow\ n\geq 2023^2-1$$

Le plus petit entier cherché est : 2023^2-1.

Exercice 5 :

Montrer que : $\displaystyle\frac{1}{3\times4}+\frac{1\times2}{3\times4\times5}+\frac{1\times2\times3}{3\times4\times5\times6}+\ldots=\frac{1}{6}$

$$\frac{1}{3\times4}+\frac{1\times2}{3\times4\times5}+\frac{1\times2\times3}{3\times4\times5\times6}+\ldots=\frac{1}{3\times4}+\frac{1\times2}{3\times4\times5}+\frac{1\times2\times\boxed{3}}{\boxed{3}\times4\times5\times6}+\frac{1\times2\times\boxed{3}\times\boxed{4}}{\boxed{3}\times\boxed{4}\times5\times6\times7}+\ldots$$

$$=\frac{1}{12}+\frac{1}{30}+\frac{2}{4\times5\times6}+\frac{2}{5\times6\times7}+\frac{2}{6\times7\times8}+\ldots$$

$$=\frac{1}{12}+\frac{1}{30}+2\times\sum_{n=4}^{+\infty}\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}$$

On pose $\displaystyle\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n+1}+\frac{c}{n+2}$ par la résolution avec un système, on obtient :

$$\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}=\frac{\frac{1}{2}}{n}+\frac{-1}{n+1}+\frac{\frac{1}{2}}{n+2}$$

Ainsi :

$$\frac{1}{3\times4}+\frac{1\times2}{3\times4\times5}+\frac{1\times2\times3}{3\times4\times5\times6}+\ldots=\frac{1}{12}+\frac{1}{30}+\sum_{n=4}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{-2}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)$$

Or : $\displaystyle\sum_{n=4}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{-2}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)=\left(\frac{1}{4}+\frac{-2}{5}+\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{-2}{6}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{6}+\frac{-2}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{7}+\frac{-2}{8}+\frac{1}{9}\right)+\ldots$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{1}{20}$$

On obtient :

$$\frac{1}{3\times4}+\frac{1\times2}{3\times4\times5}+\frac{1\times2\times3}{3\times4\times5\times6}+...=\frac{1}{12}+\frac{1}{30}+\frac{1}{20}=\frac{5}{60}+\frac{2}{60}+\frac{3}{60}=\frac{10}{60}=\frac{1}{6}$$

Exercice 6 :

Soit le nombre qui s'écrit 11…155…56 avec, à droite le chiffre 6, puis au milieu 2020 fois le chiffre 5, et enfin 2021 fois le chiffre 1 à gauche. Sa racine carrée a le bon goût d'être un nombre entier. Saurez-vous calculer la somme des chiffres de celle-ci ?

Ce nombre est à peu près égal à $1{,}11\times10^{4042}$, sa racine carrée devrait être à peu près égale à $\sqrt{1{,}11}\times10^{2021}$.
Cette racine carrée étant un nombre entier, ce nombre se termine par un 4 ou un 6.

→soit x le chiffre des dizaines de ce nombre :

Pour obtenir '56' à droite en élevant au carré, il faut que le nombre 'x4' ou 'x6' élevé au carré se termine par 56 :

$$34^2=1156\ ,\ 84^2=7056\ ,\ 16^2=256\ ,\ 66^2=4356\,.$$

On remarque que :

$\sqrt{1156}=34$ → un chiffre 5, un chiffre 3

$\sqrt{111\,556}=334$ → deux chiffres 5, deux chiffres 3

$\sqrt{11\,115\,556}=3\,334$ → trois chiffres 5, trois chiffres 3

$\sqrt{1\,111\,155\,556}=33\,334$ → quatre chiffres 5, quatre chiffres 3

$\sqrt{1...15...56}=33...334$ → 2020 chiffres 5, 2020 chiffres 3.

La somme des chiffres du nombre cherché est :

$$2020\times3+4=6064\,.$$

Démonstration par récurrence :

Montrons que pour tout entier n :

$$1\times\sum_{i=n+1}^{2n+1}10^i+5\times\sum_{i=1}^{n}10^i+6=\left(3\times\sum_{i=1}^{n}10^i+4\right)^2$$

Initialisation :

Pour $j=1$: $1156=34^2 \Leftrightarrow 1\times\sum_{i=2}^{3}10^i+5\times10+6=(3\times10+4)^2$ →l'initialisation est vérifiée.

Hérédité : ***(une version courte de l'hérédité se trouve à la fin)***

Supposons qu'il existe un rang n tel que : $\left(3\times\sum_{i=1}^{n}10^i+4\right)^2=1\times\sum_{i=n+1}^{2n+1}10^i+5\times\sum_{i=1}^{n}10^i+6$

Est-ce que $\left(3\times\sum_{i=1}^{n+1}10^i+4\right)^2=1\times\sum_{i=n+2}^{2n+3}10^i+5\times\sum_{i=1}^{n+1}10^i+6$?

J'utiliserai le principe suivant :

$$(300+34)^2 = 300^2 + 2\times 300\times 34 + 34^2$$
$$= 300(300+2\times 34)+34^2$$

$$(3000+334)^2 = 3000^2 + 2\times 3000\times 334 + 334^2$$
$$= 3000(3000+2\times 334)+334^2$$

$$\left(3\times 10^n + 3\times\sum_{i=1}^{n-1}10^i+4\right)^2 = \left(3\times 10^n\right)^2 + 2\times 3\times 10^n \times\left(3\times\sum_{i=1}^{n-1}10^i+4\right)+\left(3\times\sum_{i=1}^{n-1}10^i+4\right)^2$$
$$= \left(3\times 10^n\right)\left[3\times 10^n + 2\times\left(3\times\sum_{i=1}^{n-1}10^i+4\right)\right]+\left(3\times\sum_{i=1}^{n-1}10^i+4\right)^2$$

Ainsi :
$$\left(3\times\sum_{i=1}^{n}10^i+4\right)^2 + \left(3\times 10^{n+1}\right)\left[3\times 10^{n+1}+2\times\left(3\times\sum_{i=1}^{n}10^i+4\right)\right] = \left(3\times 10^{n+1}+3\times\sum_{i=1}^{n}10^i+4\right)^2$$
$$= \left(3\times\sum_{i=1}^{n+1}10^i+4\right)^2$$

Par hypothèse :
$$\left(3\times\sum_{i=1}^{n}10^i+4\right)^2 = 1\times\sum_{i=n+1}^{2n+1}10^i + 5\times\sum_{i=1}^{n}10^i+6$$

Ainsi :
$$\left(3\times\sum_{i=1}^{n}10^i+4\right)^2 + \left(3\times 10^{n+1}\right)\left[3\times 10^{n+1}+2\times\left(3\times\sum_{i=1}^{n}10^i+4\right)\right] = \left(3\times 10^{n+1}\right)\left[3\times 10^{n+1}+2\times\left(3\times\sum_{i=1}^{n}10^i+4\right)\right]+1\times\sum_{i=n+1}^{2n+1}10^i+5\times\sum_{i=1}^{n}10^i+6$$

$$\left(3\times\sum_{i=1}^{n+1}10^i+4\right)^2 = \left[9\times 10^{2n+2}+6\times 10^{n+1}\times\left(3\times\sum_{i=1}^{n}10^i+4\right)\right]+1\times\sum_{i=n+1}^{2n+1}10^i+5\times\sum_{i=1}^{n}10^i+6$$
$$= \left[9\times 10^{2n+2}+18\times\sum_{i=1}^{n}10^{n+1+i}+24\times 10^{n+1}\right]+\sum_{i=n+1}^{2n+1}10^i+5\times\sum_{i=1}^{n}10^i+6$$
$$= \left[9\times 10^{2n+2}+18\times\sum_{i=n+2}^{2n+1}10^i+2\times 10^{n+2}+4\times 10^{n+1}\right]+\sum_{i=n+2}^{2n+1}10^i+10^{n+1}+5\times\sum_{i=1}^{n}10^i+6$$
$$= \left[9\times 10^{2n+2}+2\times 10^{n+2}\right]+19\times\sum_{i=n+2}^{2n+1}10^i+5\times 10^{n+1}+5\times\sum_{i=1}^{n}10^i+6$$
$$= \left[9\times 10^{2n+2}+2\times 10^{n+2}\right]+10\times\sum_{i=n+2}^{2n+1}10^i+9\times\sum_{i=n+2}^{2n+1}10^i+5\times\sum_{i=1}^{n+1}10^i+6$$
$$= 9\times 10^{2n+2}+19\times\sum_{i=n+2}^{2n+1}10^i+2\times 10^{n+2}+5\times\sum_{i=1}^{n+1}10^i+6$$
$$= 9\times 10^{2n+2}+(20-1)\times\sum_{i=n+2}^{2n+1}10^i+2\times 10^{n+2}+5\times\sum_{i=1}^{n+1}10^i+6$$
$$= 9\times 10^{2n+2}+20\times\sum_{i=n+2}^{2n+1}10^i-1\times\sum_{i=n+2}^{2n+1}10^i+2\times 10^{n+2}+5\times\sum_{i=1}^{n+1}10^i+6$$
$$= 9\times 10^{2n+2}+2\times\sum_{i=n+3}^{2n+2}10^i-1\times\sum_{i=n+2}^{2n+1}10^i+2\times 10^{n+2}+5\times\sum_{i=1}^{n+1}10^i+6$$
$$= 9\times 10^{2n+2}+2\times 10^{2n+2}+2\times\sum_{i=n+3}^{2n+1}10^i-1\times\sum_{i=n+2}^{2n+1}10^i+2\times 10^{n+2}+5\times\sum_{i=1}^{n+1}10^i+6$$

$$=11\times10^{2n+2}+2\times\sum_{i=n+2}^{2n+1}10^i-1\times\sum_{i=n+2}^{2n+1}10^i+5\times\sum_{i=1}^{n+1}10^i+6$$

$$=11\times10^{2n+2}+1\times\sum_{i=n+2}^{2n+1}10^i+5\times\sum_{i=1}^{n+1}10^i+6$$

$$=1\times\sum_{i=n+2}^{2n+3}10^i+5\times\sum_{i=1}^{n+1}10^i+6$$

L'hérédité est vérifiée.

Par récurrence, pour tout entier n, $1\times\sum_{i=2021}^{4041}10^i+5\times\sum_{i=1}^{2020}10^i+6=\left(3\times\sum_{i=1}^{2020}10^i+4\right)^2$.

Pour $n=2000$:

$$1\times\sum_{i=n+1}^{2n+1}10^i+5\times\sum_{i=1}^{n}10^i+6=\left(3\times\sum_{i=1}^{n}10^i+4\right)^2$$

La somme des chiffres du nombre cherché est :

$$2020\times3+4=6064.$$

Version courte de l'hédérité :

$$\left(3\times\sum_{i=1}^{n}10^i+4\right)^2+\left(3\times10^{n+1}\right)\left[3\times10^{n+1}+2\times\left(3\times\sum_{i=1}^{n}10^i+4\right)\right]=\left(3\times10^{n+1}\right)\left[3\times10^{n+1}+2\times\left(3\times\sum_{i=1}^{n}10^i+4\right)\right]+1\times\sum_{i=n+1}^{2n+1}10^i+5\times\sum_{i=1}^{n}10^i+6$$

$$\left(3\times\sum_{i=1}^{n+1}10^i+4\right)^2=\left[9\times10^{2n+2}+6\times10^{n+1}\times\left(3\times\sum_{i=1}^{n}10^i+4\right)\right]+1\times\sum_{i=n+1}^{2n+1}10^i+5\times\sum_{i=1}^{n}10^i+6$$

$$=\left[9\times10^{2n+2}+\left(18\times\sum_{i=n+2}^{2n+1}10^i+24\times10^{n+1}\right)\right]+1\times\sum_{i=n+2}^{2n+1}10^i+10^{n+1}+5\times\sum_{i=1}^{n}10^i+6$$

$$=9\times10^{2n+2}+19\times\sum_{i=n+2}^{2n+1}10^i+2\times10^{n+2}+5\times10^{n+1}+5\times\sum_{i=1}^{n}10^i+6$$

$$=9\times10^{2n+2}+(20-1)\times\sum_{i=n+2}^{2n+1}10^i+2\times10^{n+2}+5\times\sum_{i=1}^{n+1}10^i+6$$

$$=9\times10^{2n+2}+20\times\sum_{i=n+2}^{2n+1}10^i-1\times\sum_{i=n+2}^{2n+1}10^i+2\times10^{n+2}+5\times\sum_{i=1}^{n+1}10^i+6$$

$$=9\times10^{2n+2}+2\times\sum_{i=n+3}^{2n+2}10^i-1\times\sum_{i=n+2}^{2n+1}10^i+2\times10^{n+2}+5\times\sum_{i=1}^{n+1}10^i+6$$

$$=9\times10^{2n+2}+2\times10^{2n+2}+2\times\sum_{i=n+3}^{2n+1}10^i-1\times\sum_{i=n+3}^{2n+1}10^i-1\times10^{n+2}+2\times10^{n+2}+5\times\sum_{i=1}^{n+1}10^i+6$$

$$=11\times10^{2n+2}+1\times\sum_{i=n+3}^{2n+1}10^i+1\times10^{n+2}+5\times\sum_{i=1}^{n+1}10^i+6$$

$$=1\times\sum_{i=n+2}^{2n+3}10^i+5\times\sum_{i=1}^{n+1}10^i+6$$

Exercice 7 :

Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et a_1, a_2, ..., a_n n réels strictement positifs.

1. *Vérifier que $\forall x>0$: $x+\frac{1}{x}\geq 2$.*

$$x+\frac{1}{x}-2=\frac{x^2+1-2x}{x}=\frac{(x-1)^2}{x}$$

Donc pour tout réel x strictement positif :

$$x+\frac{1}{x}-2\geq 0 \iff x+\frac{1}{x}\geq 2$$

2. *En déduire, par récurrence, que :* $\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\times\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\geq n^2$.

Montrons par récurrence sur n que $\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\times\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\geq n^2$.

Initialisation : Si $n=1$ alors $1\times\frac{1}{1}=1$ donc : $1\times\frac{1}{1}\geq 1^2$. La propriété est vraie au rang 1.

Hérédité : Supposons qu'il existe un rang n tel que : $\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\times\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\geq n^2$, cela implique-t-il :

$$\left(\sum_{i=1}^{n+1}a_i\right)\times\left(\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{a_i}\right)\geq (n+1)^2 \text{ ?}$$

On a : $$\left(\sum_{i=1}^{n+1}a_i\right)\times\left(\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{a_i}\right)=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i+a_{n+1}\right)\times\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}+\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$
$$=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\times\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)+\frac{1}{a_{n+1}}\times\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)+a_{n+1}\times\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)+\frac{a_{n+1}}{a_{n+1}}$$

On étudie : $\frac{1}{a_{n+1}}\times\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)+a_{n+1}\times\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)$:

$$\frac{1}{a_{n+1}}\times\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)+a_{n+1}\times\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)=\frac{a_1}{a_{n+1}}+\frac{a_2}{a_{n+1}}+\ldots+\frac{a_n}{a_{n+1}}+\frac{a_{n+1}}{a_1}+\frac{a_{n+1}}{a_2}+\ldots+\frac{a_{n+1}}{a_n}$$
$$=\left(\frac{a_1}{a_{n+1}}+\frac{a_{n+1}}{a_1}\right)+\left(\frac{a_2}{a_{n+1}}+\frac{a_{n+1}}{a_2}\right)+\ldots+\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}+\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$$
$$\geq \underbrace{2+2+\ldots+2}_{n\ fois} \quad \text{(d'après la question 1.)}$$

Ainsi : $$\frac{1}{a_{n+1}}\times\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)+a_{n+1}\times\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\geq 2n.$$

On obtient, en tenant compte de l'hypothèse :

$$\left(\sum_{i=1}^{n+1}a_i\right)\times\left(\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{a_i}\right)\geq n^2+2n+1$$
$$\iff \left(\sum_{i=1}^{n+1}a_i\right)\times\left(\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{a_i}\right)\geq (n+1)^2$$: l'hérédité est vérifiée.

Par récurrence, pour tout rang $n\in\mathbb{N}^*$, $\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\times\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\geq n^2$