Terminale Spécialité Math **Notre Dame de La Merci** **20 septembre 2021**

Interrogation sur le raisonnement par récurrence

<u>Exercice 1 :</u>
Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$.

<u>Exercice 2 :</u>
Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geq 0$, 5^n+3 est un multiple de 4.

<u>Exercice 3 :</u>
On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0=6$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1}=\frac{u_n+4}{2u_n+5}.$$

Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$.

<u>Exercice 4 :</u>
On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0=0$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1}=u_n+2n+2.$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n=n^2+n$.

Interrogation sur le raisonnement par récurrence – CORRIGE – M. Quet

Exercice 1 :

Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$

Initialisation : pour $n=1$: $1^2=1$ →l'initialisation est vérifiée.

Hérédité : supposons qu'il existe un entier n tel que : $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$

→cela implique-t-il que : $1+3+5+...+(2n-1)+(2(n+1)-1)=(n+1)^2$?

En partant du rang n **:**

Par hypothèse :

$$1+3+5+...+(2n-1)=n^2$$

$$\Leftrightarrow \; 1+3+5+...+(2n-1)+(2n+1)=n^2+(2n+1)=(n+1)^2$$

En partant du rang $n+1$ **:**

$$1+3+5+...+(2n-1)+(2n+1)=n^2+(2n+1)=(n+1)^2$$

L'hérédité est vérifiée.

Par **récurrence**, pour tout entier $n \geq 1$, $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$.

Exercice 2 :

Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geq 0$, 5^n+3 *est un multiple de 4.*

Initialisation : pour $n=0$: $5^0+3=1+3=4$ →l'initialisation est vérifiée.

Hérédité : supposons qu'il existe un entier n tel que : $5^n+3=4k$, $k \in \mathbb{Z}$

→cela implique-t-il que : $5^{n+1}+3=4k'$, $k' \in \mathbb{Z}$?

En partant du rang n **:**

Par hypothèse :

$$5^n+3=4k \text{ , } k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \; 5\times(5^n+3)=5\times 4k \text{ , } k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \; 5^{n+1}+15=4\times 5k \text{ , } k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \; 5^{n+1}+3+12=4\times 5k \text{ , } k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \; 5^{n+1}+3=4\times 5k-12=4(5k-3) \text{ , } k \in \mathbb{Z}$$

Or $k \in \mathbb{Z}$ donc $5k-3 \in \mathbb{Z}$ et $5^{n+1}+3$ est un multiple de 4.

En partant du rang $n+1$ **:**

$$5^{n+1}+3=5\times 5^n+3=5\times 5^n+15-12=5(5^n+3)-4\times 3$$

Or 5^n+3 est un multiple de 4 et la différence de deux multiples de 4 est un multiples de 4.

L'hérédité est vérifiée.

Par **récurrence**, pour tout entier naturel $n \geq 0$, 5^n+3 est un multiple de 4.

Exercice 3 :

On considère la suite (u_n) *définie sur* $\mathbb{N}$ *par :* $u_0=6$ *et, pour tout entier naturel n :* $u_{n+1}=\dfrac{u_n+4}{2u_n+5}$.

Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\dfrac{1}{2} \leq u_n \leq 1$.

Initialisation : $u_1 = \dfrac{u_0+4}{2u_0+5} = \dfrac{6+4}{2\times 6+5} = \dfrac{10}{17}$ donc : $\dfrac{1}{2} \le u_1 \le 1$ →l'initialisation est vérifiée.

Hérédité : supposons qu'il existe un entier $n \ge 1$ tel que : $\dfrac{1}{2} \le u_n \le 1$

→cela implique-t-il que : $\dfrac{1}{2} \le u_{n+1} \le 1$?

On considère la fonction associée f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x+4}{2x+5}$.

Sa dérivée est : $f'(x) = \dfrac{1(2x+5)-(x+4)\times 2}{(2x+5)^2} = \dfrac{2x+5-2x-8}{(2x+5)^2} = \dfrac{-3}{(2x+5)^2}$

$\forall x \in [0;+\infty[$: $f'(x) < 0$ donc la fonction f est décroissante sur $[0;+\infty[$.

Par hypothèse :

$$\frac{1}{2} \le u_n \le 1$$

Donc : $$f\left(\frac{1}{2}\right) \ge f(u_n) \ge f(1)$$

$$\Leftrightarrow \quad 0,75 \ge f(u_n) \ge \frac{5}{7}$$

Ainsi : $$\frac{1}{2} \le u_{n+1} \le 1$$

L'hérédité est vérifiée.

Par **récurrence**, pour tout entier naturel $n \ge 1$, $\dfrac{1}{2} \le u_n \le 1$.

Exercice 4 :

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 2.$$

1. *Calculer u_1, u_2 et u_3.*

$$u_1 = u_{0+1} = u_0 + 2\times 0 + 2 = 0+0+2 = 2$$
$$u_2 = u_{1+1} = u_1 + 2\times 1 + 2 = 2+2+2 = 6$$
$$u_3 = u_{2+1} = u_2 + 2\times 2 + 2 = 6+4+2 = 12$$

2. *Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n = n^2 + n$.*

Initialisation : pour $n = 0$: $0^2 + 0 = 0 = u_0$ →l'initialisation est vérifiée.

Hérédité : supposons qu'il existe un entier $n \ge 0$ tel que : $u_n = n^2 + n$

→cela implique-t-il que : $u_{n+1} = (n+1)^2 + (n+1) = n^2 + 2n + 1 + n + 1 = n^2 + 3n + 2$?

Par définition :

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 2$$

Or par hypothèse : $u_n = n^2 + n$, donc :

$$u_{n+1} = u_n = n^2 + n + 2n + 2 = n^2 + 3n + 2.$$

L'hérédité est vérifiée.

Par **récurrence**, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 2n + 2$.