Terminale Spécialité Math **Notre Dame de La Merci** **20 septembre 2022**

Interrogation sur le raisonnement par récurrence (30 minutes)

Exercice 1 :

Démontrer, en utilisant la propriété de récurrence, que pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$2+4+6+...+2n = n^2 + n.$$

Exercice 2 :

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$6^n + (-1)^{n+1}$ est un multiple de 7.

Exercice 3 :

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}.$$

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 < u_n < 1$.

Exercice 4 :

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3.$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n = 3^n + n - 1$.

Interrogation sur le raisonnement par récurrence – CORRIGE – M. Quet

Exercice 1 :

Démontrer, en utilisant la propriété de récurrence, que pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$2+4+6+...+2n=n^2+n.$$

Initialisation : si $n=1$: $1^2+1=2=2\times1$: l'initialisation est vérifiée.

Hérédité : supposons qu'il existe un rang n tel que : $2\times1+2\times2+2\times3+...+2\times n=n^2+n$.

→cela implique-t-il : $2\times1+2\times2+2\times3+...+2\times n+2\times(n+1)=(n+1)^2+(n+1)=n^2+3n+2$?

On exprime le rang $(n+1)$:

$$(2+4+6+...+2n)+2(n+1)=(n^2+n)+2(n+1)$$ →en injectant l'hypothèse

$$=n^2+n+2n+2=n^2+3n+2$$

L'hérédité est vérifiée.

Par récurrence, pour tout entier $n\geq1$: $2+4+6+...+2n=n^2+n$.

Exercice 2 : *Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n\geq1$:*

$6^n+(-1)^{n+1}$ *est un multiple de 7.*

Initialisation : si $n=1$: $6^1+(-1)^{1+1}=6+1=7$: l'initialisation est vérifiée.

Hérédité : supposons qu'il existe un rang n tel que : $6^n+(-1)^{n+1}=7\times k$, $k\in\mathbb{Z}$.

→cela implique-t-il : $6^{n+1}+(-1)^{(n+1)+1}=7\times k'$, $k'\in\mathbb{Z}$?

En partant du rang n :

$$6^n+(-1)^{n+1}=7\times k \text{ , } k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \quad 6\times\left[6^n+(-1)^{n+1}\right]=6\times7\times k \text{ , } k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \quad 6^{n+1}+6\times(-1)^{n+1}=6\times7\times k \text{ , } k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \quad 6^{n+1}+(7-1)\times(-1)^{n+1}=6\times7\times k \text{ , } k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \quad 6^{n+1}+7\times(-1)^{n+1}-1\times(-1)^{n+1}=6\times7\times k \text{ , } k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \quad 6^{n+1}+(-1)^{n+2}=7\times6k-7\times(-1)^{n+1}=7\times\left[6k-(-1)^{n+1}\right] \text{, } k\in\mathbb{Z}$$

En partant du rang $n+1$:

$$6^{n+1}+(-1)^{n+2}=6\times6^n+(-1)\times(-1)^{n+1}=6\times6^n+(6-7)\times(-1)^{n+1}$$

$$=6\times6^n+6\times(-1)^{n+1}-7\times(-1)^{n+1}=6\times\left[6^n+(-1)^{n+1}\right]-7\times(-1)^{n+1}$$

or par hypothèse : $\left[6^n+(-1)^{n+1}\right]$ est un multiple de 7 et la somme de deux multiples de 7 est un multiple de 7 : l'hérédité est vérifiée.

Par récurrence, pour tout entier $n\geq1$: $6^n+(-1)^{n+1}$ est un multiple de 7.

Exercice 3 :

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0=\frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=\frac{3u_n}{1+2u_n}$.

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 < u_n < 1$.

La fonction associée est définie par : $f(x) = \frac{3x}{1+2x}$, définie sur $[0;1]$.

$$f'(x) = \frac{3(1+2x) - 3x \times 2}{(1+2x)^2} = \frac{3+6x-6x}{(1+2x)^2} = \frac{3}{(1+2x)^2}$$

La dérivée est strictement positive sur $[0;1]$ donc la fonction f est strictement croissante sur $[0;1]$.

Initialisation : si $n = 0$: $u_0 = \frac{1}{2}$ donc $0 < u_0 < 1$: l'initialisation est vérifiée.

Hérédité : supposons qu'il existe un rang *n* tel que : $0 < u_n < 1$.

→cela implique-t-il : $0 < u_{n+1} < 1$?

Par hypothèse :

$$0 < u_n < 1$$

La fonction f étant strictement croissante sur $[0;1]$, on obtient :

$$f(0) < f(u_n) < f(1)$$

$\Leftrightarrow$ $0 < u_{n+1} < 1$: l'hérédité est vérifiée.

Par récurrence, pour tout entier naturel n : $0 < u_n < 1$.

Exercice 4 :

On considère la suite (u_n) *définie sur* $\mathbb{N}$ *par :* $u_0 = 0$ *et, pour tout entier naturel n :*

$$u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3.$$

1. *Calculer* u_1, u_2 *et* u_3.

$$u_1 = u_{0+1} = 3u_0 - 2\times 0 + 3 = 3\times 0 - 2\times 0 + 3 = 3$$
$$u_2 = u_{1+1} = 3u_1 - 2\times 1 + 3 = 3\times 3 - 2\times 1 + 3 = 10$$
$$u_3 = u_{2+1} = 3u_2 - 2\times 2 + 3 = 3\times 10 - 2\times 2 + 3 = 29$$

2. *Démontrer que pour tout entier naturel* n, $u_n = 3^n + n - 1$.

Initialisation : si $n = 0$: $3^0 + 0 - 1 = 1 - 1 = 0 = u_0$: l'initialisation est vérifiée.

Hérédité : supposons qu'il existe un rang *n* tel que : $u_n = 3^n + n - 1$.

→cela implique-t-il : $u_{n+1} = 3^{n+1} + (n+1) - 1 = 3^{n+1} + n$?

Par définition :

$$u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3 = 3(3^n + n - 1) - 2n + 3 = 3^{n+1} + 3n - 3 - 2n + 3 = 3^{n+1} + n$$

L'hérédité est vérifiée.

Par récurrence, pour tout entier naturel n : $u_n = 3^n + n - 1$.