Fiche 1A - Rappels sur les probabilités conditionnelles

Exercice 1A.1

1) A et B sont tels que $p(\mathrm{A})=\frac{1}{2}$, $p(\mathrm{B})=\frac{1}{4}$ et $p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\frac{1}{10}$.

   Calculer $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ et $p_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})$.

2) A et B sont tels que $p(\mathrm{A})=\frac{1}{2}$, $p(\mathrm{B})=\frac{1}{3}$ et $p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=\frac{2}{3}$.

   Calculer $p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$, $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ et $p_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})$.

3) A et B sont tels que $p(\mathrm{A})=\frac{1}{3}$, $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})=\frac{1}{4}$ et $p_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{B})=\frac{1}{2}$.

   Calculer $p(\mathrm{B})$.

4) A et B sont tels que $p(\mathrm{A})=\frac{1}{2}$, $p(\mathrm{B})=\frac{3}{4}$ et $p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\frac{2}{5}$.

   a) Calculer $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ et $p_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})$.

   b) Calculer $p(\overline{\mathrm{A}}\cap\overline{\mathrm{B}})$. En déduire $p_{\overline{\mathrm{A}}}(\overline{\mathrm{B}})$.

Exercice 1A.2

À la suite d'un sondage effectué à propos de la construction d'un barrage, on estime que :

- 65% de la population concernée est contre la construction de ce barrage et parmi ces opposants, 70% sont des écologistes ;
- parmi les personnes non opposées à la construction, 20% sont des écologistes.

On interroge une personne au hasard.

1) Écrire les probabilités correspondantes aux données puis construire un arbre pondéré.
2) Calculer la probabilité qu'une personne interrogée soit opposée au barrage et soit écologiste.
3) Calculer la probabilité qu'une personne interrogée ne soit pas opposée et soit écologiste.
4) En déduire la probabilité qu'une personne interrogée soit écologiste.

Exercice 1A.3

Un tiroir T_1 contient cinq pièces d'or et cinq pièces d'argent, un tiroir T_2 en contient quatre d'or et six d'argent. On choisit au hasard l'un des tiroirs et dans ce tiroir, on prend une pièce au hasard.

1) Construire l'arbre pondéré de cette expérience aléatoire.
2) Calculer la probabilité de prendre une pièce d'or
   - du tiroir T_1 ;
   - du tiroir T_2.
3) Calculez la probabilité de prendre une pièce d'or.
4) On a extrait une pièce d'or. Quelle est alors la probabilité qu'elle provienne du tiroir T_1 ? Pouvait-on le prévoir ?

Exercice 1A.4

Le personnel d'un hôpital est réparti en trois catégories : M (médecins), S (soignants non médecins) et AT (personnel administratif ou technique).

- 12% sont des médecins et 71% des soignants.
- 67% des médecins sont des hommes et 92% des soignants sont des femmes.

On interroge au hasard un membre du personnel

1) Écrire les probabilités correspondantes aux données puis construire un arbre pondéré.
2) Quelle est la probabilité que la personne interrogée soit une femme soignante ? une femme médecin ?
3) On sait que 80% du personnel est féminin.
   a) Calculer la probabilité que la personne interrogée soit une femme AT.
   b) En déduire la probabilité que la personne interrogée soit une femme sachant que cette personne interrogée est AT.

Exercice 1A.5

Un lot de cent dés contient vingt dés pipés. Pour un tel dé, la probabilité d'apparition du 6 est égale à $\frac{1}{2}$. Les autres dés sont parfaits.

1) On prend au hasard un dé, on le lance. Calculer la probabilité de l'événement S «on obtient 6 ».
2) On prend au hasard un dé, on le lance, on obtient 6. Calculer la probabilité que le dé soit pipé.

Exercice 1A.6

Une étude épidémiologique concernant une certaine maladie a été faite dans des familles ayant deux enfants de moins de dix ans : une fille et un garçon. On a constaté que 20 % des filles et 50 % des garçons sont touchés par la maladie. Par ailleurs, dans les familles dont la fille est malade, le garçon l'est aussi dans 70 % des cas. On notera :

- F l'événement « la fille de la famille est atteinte par la maladie » ;
- G l'événement « le garçon de la famille est atteint par la maladie. »

On choisit au hasard une famille ayant fait l'objet de cette étude. Quelle est la probabilité que :

1) A « les deux enfants soient atteints par la maladie » ;
2) B « au moins l'un des deux enfants soit atteint » ;
3) C « aucun des deux enfants ne soit atteint » ;
4) D « la fille soit atteinte sachant que le garçon l'est » ;
5) E « la fille soit atteinte sachant que le garçon n'est pas atteint. »
6) H « le garçon soit atteint sachant que la fille n'est pas atteinte. »

Exercice 1A.1

1) *A et B sont tels que* $p(\mathrm{A})=\frac{1}{2}$, $p(\mathrm{B})=\frac{1}{4}$ *et* $p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\frac{1}{10}$. *Calculer* $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ *et* $p_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})$.

$$p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})=\frac{p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{p(\mathrm{A})}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{10}\times 2=\frac{1}{5}$$

$$p_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})=\frac{p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{p(\mathrm{B})}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{4}}=\frac{1}{10}\times 4=\frac{2}{5}$$

2) *A et B sont tels que* $p(\mathrm{A})=\frac{1}{2}$, $p(\mathrm{B})=\frac{1}{3}$ *et* $p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=\frac{2}{3}$. *Calculer* $p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$, $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ *et* $p_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})$

$$p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=p(\mathrm{A})+p(\mathrm{B})-p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}-\frac{4}{6}=\frac{1}{6}$$

$$p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})=\frac{p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{p(\mathrm{A})}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{6}\times 2=\frac{1}{3}\quad \text{et}\quad p_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})=\frac{p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{p(\mathrm{B})}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{6}\times 3=\frac{1}{2}$$

3) *A et B sont tels que* $p(\mathrm{A})=\frac{1}{3}$, $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})=\frac{1}{4}$ *et* $p_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{B})=\frac{1}{2}$. *Calculer* $p(\mathrm{B})$.

A et $\overline{\mathrm{A}}$ forment une partition de l'univers, d'après la loi des probabilités totales :

$$p(\mathrm{B})=p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})+p(\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{B})=p(\mathrm{A})\times p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})+p(\overline{\mathrm{A}})\times p_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{B})=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{12}.$$

4) *A et B sont tels que* $p(\mathrm{A})=\frac{1}{2}$, $p(\mathrm{B})=\frac{3}{4}$ *et* $p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\frac{2}{5}$.

a) *Calculer* $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ *et* $p_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})$.

$$p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})=\frac{p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{p(\mathrm{A})}=\frac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{5}\times 2=\frac{4}{5}\quad \text{et}\quad p_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})=\frac{p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{p(\mathrm{B})}=\frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{4}}=\frac{2}{5}\times\frac{4}{3}=\frac{8}{15}.$$

b) *Calculer* $p(\overline{\mathrm{A}}\cap\overline{\mathrm{B}})$. *En déduire* $p_{\overline{\mathrm{A}}}(\overline{\mathrm{B}})$.

$$p(\overline{\mathrm{A}}\cap\overline{\mathrm{B}})=p(\overline{\mathrm{A}\cup\mathrm{B}})=1-p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=1-\left[p(\mathrm{A})+p(\mathrm{B})-p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\right]$$

$$=1-\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\frac{2}{5}\right)=1-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}+\frac{2}{5}=\frac{20}{20}-\frac{10}{20}-\frac{15}{20}+\frac{8}{20}=\frac{3}{20}$$

$$p_{\overline{\mathrm{A}}}(\overline{\mathrm{B}})=\frac{p(\overline{\mathrm{A}}\cap\overline{\mathrm{B}})}{p(\overline{\mathrm{A}})}=\frac{p(\overline{\mathrm{A}}\cap\overline{\mathrm{B}})}{1-p(\mathrm{A})}=\frac{\frac{3}{20}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{3}{20}}{\frac{1}{2}}=\frac{3}{20}\times 2=\frac{3}{10}.$$

Exercice 1A.2

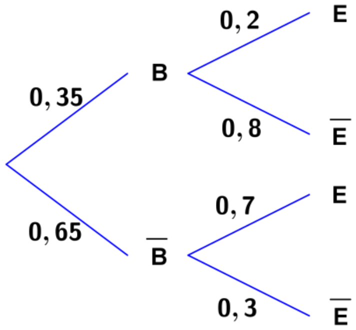
À la suite d'un sondage effectué à propos de la construction d'un barrage, on estime que :

- *65% de la population concernée est contre la construction de ce barrage et parmi ces opposants, 70% sont des écologistes ;*
- *parmi les personnes non opposées à la construction, 20% sont des écologistes.*

On interroge une personne au hasard.

1) *Écrire les probabilités correspondantes aux données puis construire un arbre pondéré.*
On note les évènements suivants :
B : « La personne est pour le barrage » ;
E : «La personne est écologiste ».

$p(\overline{B}) = 0,65$, $p_{\overline{B}}(E) = 0,7$ et $p_B(E) = 0,2$



2) *Calculer la probabilité qu'une personne interrogée soit opposée au barrage et soit écologiste.*

$$p(\overline{B} \cap E) = p_{\overline{B}}(E) \times p(\overline{B}) = 0,7 \times 0,65 = 0,455$$

3) *Calculer la probabilité qu'une personne interrogée ne soit pas opposée au barrage et soit écologiste*

$$p(B \cap E) = p_B(E) \times p(B) = 0,2 \times 0,35 = 0,07$$

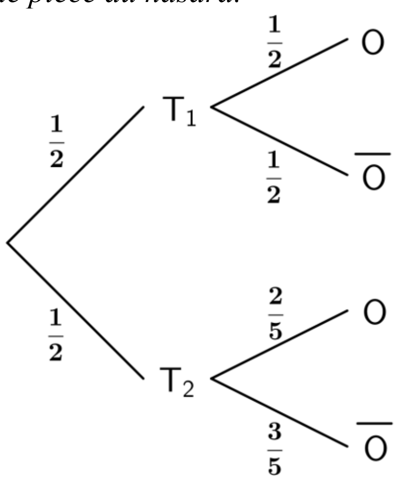
4) *En déduire la probabilité qu'une personne interrogée soit écologiste.*
B et $\overline{B}$ forment une partition de l'univers, d'après loi des probabilités totales :

$$p(E) = p(B \cap E) + p(\overline{B} \cap E) = 0,455 + 0,07 = 0,525$$

Exercice 1A.3

Un tiroir T_1 contient cinq pièces d'or et cinq pièces d'argent, un tiroir T_2 en contient quatre d'or et six d'argent. On choisit au hasard l'un des tiroirs et dans ce tiroir, on prend une pièce au hasard.

1) *Construire l'arbre pondéré de cette expérience aléatoire.*
Soit O l'évènement « on choisit une pièce d'or ».
L'arbre est ci-contre :



2) *Calculer la probabilité de prendre une pièce d'or*

- du tiroir T_1 : d'après l'énoncé : $p_{T_1}(O) = \frac{1}{2}$
- du tiroir T_2 : d'après l'énoncé : $p_{T_2}(O) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

3) *Calculez la probabilité de prendre une pièce d'or.*
T_1 et T_2 forment une partition de l'univers.
D'après la loi des probabilités totales :

$$p(O) = p(T_1 \cap O) + p(T_2 \cap O)$$

$$p(T_1) = p(T_1) \times p_{T_1}(O) + p(T_2) \times p_{T_2}(O)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{5}{20} + \frac{4}{20} = \frac{9}{20}$$

4) *On a extrait une pièce d'or. Quelle est alors la probabilité qu'elle provienne du tiroir T_1 ? Pouvait-on le prévoir ?*

$$p_O(T_1) = \frac{p(T_1 \cap O)}{p(O)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{\frac{9}{20}} = \frac{1}{4} \times \frac{20}{9} = \frac{5}{9}$$

Exercice 1A.4

Le personnel d'un hôpital est réparti en trois catégories : M (médecins), S (soignants non médecins) et AT (personnel administratif ou technique).

- *12% sont des médecins et 71% des soignants.*
- *67% des médecins sont des hommes et 92% des soignants sont des femmes.*

On interroge au hasard un membre du personnel

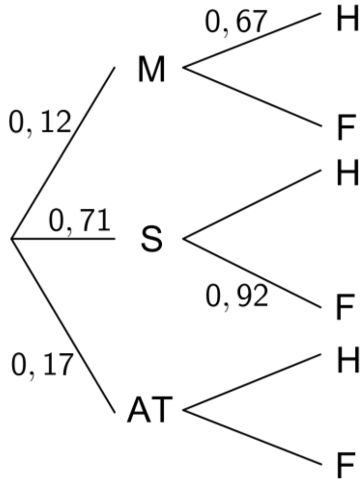
1) *Écrire les probabilités correspondantes aux données puis construire un arbre pondéré.*

$$p(\mathrm{M})=0{,}12 \quad , \quad p(\mathrm{S})=0{,}71 \quad ,$$

$$p(\mathrm{AT})=1-p(\mathrm{M})-p(\mathrm{S})=1-0{,}12-0{,}71=0{,}17$$

On utilise les évènements H pour les hommes et F pour les femmes :

$$p_{\mathrm{M}}(\mathrm{H})=0{,}67 \quad , \quad p_{\mathrm{S}}(\mathrm{F})=0{,}92 .$$



2) *Quelle est la probabilité que la personne interrogée soit une femme soignante ? une femme médecin ?*

Pour une femme soignante :

$$p(\mathrm{S}\cap\mathrm{F})=p(\mathrm{S})\times p_{\mathrm{S}}(\mathrm{F})=0{,}71\times 0{,}92=0{,}6532$$

Pour une femme médecin :

$$p_{\mathrm{M}}(\mathrm{F})=1-p_{\mathrm{M}}(\mathrm{H})=1-0{,}67=0{,}33$$

$$p(\mathrm{M}\cap\mathrm{F})=p(\mathrm{M})\times p_{\mathrm{M}}(\mathrm{F})=0{,}12\times 0{,}33=0{,}0396$$

3) *On sait que 80% du personnel est féminin.*

a) *Calculer la probabilité que la personne interrogée soit une femme AT.*

80% du personnel est féminin : $p(\mathrm{F})=0{,}8$.

M, S et AT forment une partition de l'univers. D'après la loi des probabilités totales :

$$p(\mathrm{M}\cap\mathrm{F})+p(\mathrm{S}\cap\mathrm{F})+p(\mathrm{AT}\cap\mathrm{F})=p(\mathrm{F})$$

$$\Leftrightarrow \quad p(\mathrm{AT}\cap\mathrm{F})=p(\mathrm{F})-p(\mathrm{M}\cap\mathrm{F})-p(\mathrm{S}\cap\mathrm{F})=0{,}8-0{,}0396-0{,}6532=0{,}1072 .$$

b) *En déduire la probabilité que la personne interrogée soit une femme sachant que cette personne interrogée est AT.*

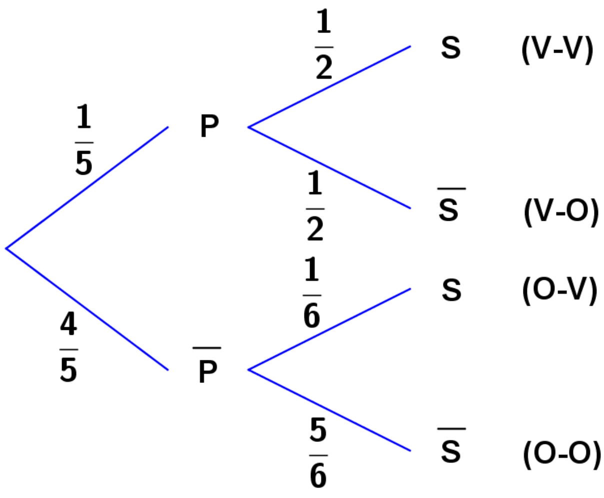
$$p_{\mathrm{AT}}(\mathrm{F})=\frac{p(\mathrm{AT}\cap\mathrm{F})}{p(\mathrm{AT})}=\frac{0{,}1072}{0{,}17}\simeq 0{,}6306$$

Exercice 1A.5

Un lot de cent dés contient vingt dés pipés. Pour un tel dé, la probabilité d'apparition du 6 est égale à $\frac{1}{2}$. *Les autres dés sont parfaits.*

1) *On prend au hasard un dé, on le lance. Calculer la probabilité de l'événement S «on obtient 6 ».*

Soit P l'évènement « le dé est pipé », on obtient l'arbre ci-contre :



2) *On prend au hasard un dé, on le lance, on obtient 6. Calculer la probabilité que le dé soit pipé.*

P et $\overline{\mathrm{P}}$ forment une partition de l'univers.

D'après la loi des probabilités totales :

$$p(\mathrm{S})=p(\mathrm{P}\cap\mathrm{S})+p(\overline{\mathrm{P}}\cap\mathrm{S})$$

$$=p(\mathrm{P})\times p_{\mathrm{P}}(\mathrm{S})+p(\overline{\mathrm{P}})\times p_{\overline{\mathrm{P}}}(\mathrm{S})$$

$$=\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{6}=\frac{7}{30}$$

Exercice 1A.6

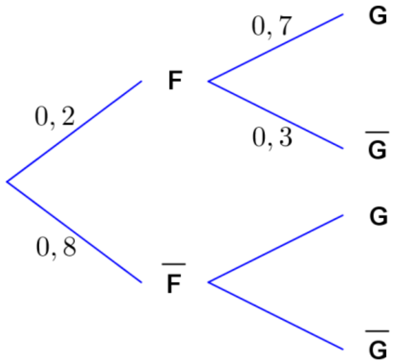
Une étude épidémiologique concernant une certaine maladie a été faite dans des familles ayant deux enfants de moins de dix ans : une fille et un garçon. On a constaté que 20 % des filles et 50 % des garçons sont touchés par la maladie. Par ailleurs, dans les familles dont la fille est malade, le garçon l'est aussi dans 70 % des cas. On notera :

- *F l'événement « la fille de la famille est atteinte par la maladie » ;*
- *G l'événement « le garçon de la famille est atteint par la maladie. »*

On choisit au hasard une famille ayant fait l'objet de cette étude.

Un schéma est indispensable pour bien visualiser la situation :

Soit F l'évènement la fille est malade et G l'évènement le garçon est malade



Quelle est la probabilité que :

1) *A « les deux enfants soient atteints par la maladie »*

$$p(F\cap G)=p(F)\times p_F(G)=0,2\times 0,7=0,14$$

2) *B « au moins l'un des deux enfants soit atteint » ;*

$$p(B)=1-p(\overline{F}\cap\overline{G})$$

F et $\overline{F}$ forment une partition de l'univers.
D'après la loi des probabilités totales :

$$p(G)=p(F\cap G)+p(\overline{F}\cap G)$$

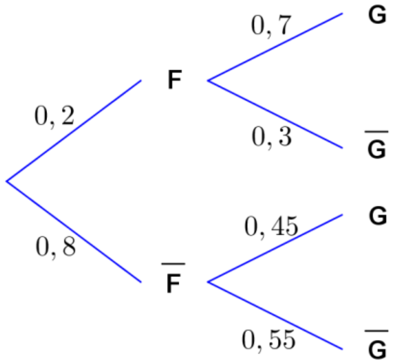
$$\Leftrightarrow\ 0,5=0,14+p(\overline{F})\times p_{\overline{F}}(G)$$

$$\Leftrightarrow\ 0,5-0,14=0,8\times p_{\overline{F}}(G)$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{0,36}{0,8}=p_{\overline{F}}(G)$$

$$\Leftrightarrow\ p_{\overline{F}}(G)=0,45$$

On peut compléter le schéma ci-contre :



Ainsi :

$$p(B)=1-p(\overline{F}\cap\overline{G})=1-p(\overline{F})\times p_{\overline{F}}(\overline{G})=1-0,8\times 0,55=0,56.$$

3) *C « aucun des deux enfants ne soit atteint »*

$$p(\overline{F}\cap\overline{G})=p(\overline{F})\times p_{\overline{F}}(\overline{G})=0,8\times 0,55=0,44$$

4) *D « la fille soit atteinte sachant que le garçon l'est*

$$p_G(F)=\frac{p(F\cap G)}{p(G)}=\frac{0,14}{0,5}=0,28$$

5) *E « la fille soit atteinte sachant que le garçon n'est pas atteint*

$$p_{\overline{G}}(F)=\frac{p(F\cap\overline{G})}{p(\overline{G})}=\frac{0,2\times 0,3}{0,5}=\frac{6}{50}=0,12$$

6) *H « le garçon soit atteint sachant que la fille n'est pas atteinte*

$$p_{\overline{F}}(G)=\frac{p(G\cap\overline{F})}{p(\overline{F})}=0,45\ \text{par lecture graphique}$$