Rappels : Indépendance d'évènements et successions de deux épreuves indépendantes

Exercice 1C.1

Un appareil ménager peut présenter après sa fabrication deux défauts.
On appelle A l'événement « l'appareil présente un défaut d'apparence » et F l'événement « l'appareil présente un défaut de fonctionnement ».
On suppose que les événements A et F sont indépendants.
On sait que la probabilité que l'appareil présente un défaut d'apparence est égale à 0, 02 et que la probabilité que l'appareil présente au moins l'un des deux défauts est égale à 0, 069.
On choisit au hasard un des appareils. Quelle est la probabilité que l'appareil présente le défaut F ?

Exercice 1C.2

Un dé cubique truqué est tel que la probabilité de sortie d'un numéro k est proportionnelle à k. On lance ce dé et on considère les événements :

- A « le numéro est pair » ;
- B « le numéro est supérieur ou égal à 3 » ;
- C « le numéro obtenu est 3 ou 4 »

a) Calculez les probabilités de A, B, C.

b) Calculez la probabilité conditionnelle $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$.

c) A et B sont-ils indépendants ? A et C ?

Exercice 1C.3

On tire au sort un individu dans une population test, formée à 60 % de personnes portant des lunettes de vue, et à 40 % de personnes n'en portant pas.
On sait de plus que 30 % des individus de cette population test sont diplômés de l'enseignement supérieur.
Déterminer une condition pour que les évènements « l'individu choisi porte des lunettes » et « l'individu choisi est diplômé du supérieur » soient indépendants.

Exercice 1C.4

Soient deux évènements A et B tels que :

$$p(\mathrm{A}) = 0,4 \quad \text{et} \quad p(\mathrm{B}) = 0,3.$$

a) Calculer $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$ et $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$ sachant que A et B sont indépendants.

b) Calculer $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$ et $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$ sachant que A et B sont incompatibles.

Exercice 1C.5

Soient deux évènements A et B vérifiant :

$$p(\mathrm{A}) = 0,4 \quad ; \quad p(\mathrm{B}) = 0,3 \quad \text{et} \quad p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = 0,58.$$

A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 1C.1

Un appareil ménager peut présenter après sa fabrication deux défauts.
On appelle A l'événement « l'appareil présente un défaut d'apparence » et F l'événement « l'appareil présente un défaut de fonctionnement ».
On suppose que les événements A et F sont indépendants.
On sait que la probabilité que l'appareil présente un défaut d'apparence est égale à 0, 02 et que la probabilité que l'appareil présente au moins l'un des deux défauts est égale à 0, 069.
On choisit au hasard un des appareils. Quelle est la probabilité que l'appareil présente le défaut F ?

D'après l'énoncé :

$$p(\mathrm{A})=0,02 \quad \text{et} \quad p(\mathrm{A}\cup\mathrm{F})=0,069$$

Les événements A et F sont indépendants donc

$$p(\mathrm{A}\cap\mathrm{F})=p(\mathrm{A})\times p(\mathrm{F})$$

D'après la loi des probabilités :

$$p(\mathrm{A}\cup\mathrm{F})=p(\mathrm{A})+p(\mathrm{F})-p(\mathrm{A}\cap\mathrm{F})=p(\mathrm{A})+p(\mathrm{F})-p(\mathrm{A})\times p(\mathrm{F})$$

$$\Leftrightarrow \quad 0,069=0,02+p(\mathrm{F})-0,02\times p(\mathrm{F})$$

$$\Leftrightarrow \quad 0,069-0,02=p(\mathrm{F})(1-0,02)$$

$$\Leftrightarrow \quad 0,049=0,98\times p(\mathrm{F})$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{0,049}{0,98}=p(\mathrm{F})$$

$$\Leftrightarrow \quad p(\mathrm{F})=0,05$$

Exercice 1C.2

Un dé cubique truqué est tel que la probabilité de sortie d'un numéro k est proportionnelle à k. On lance ce dé et on considère les événements :

- *A « le numéro est pair » ;*
- *B « le numéro est supérieur ou égal à 3 » ;*
- *C « le numéro obtenu est 3 ou 4 »*

a) *Calculez les probabilités de A, B, C.*

D'après l'énoncé :

$$p(1)=k\times 1\ ,\ p(2)=k\times 2\ ,\ p(3)=k\times 3\ ,\ p(4)=k\times 4\ ,\ p(5)=k\times 5\ ,\ p(6)=k\times 6\,.$$

Or la somme de toutes les probabilités est égale à 1 :

$$p(1)+p(2)+p(3)+p(4)+p(5)+p(6)=1$$

$$\Leftrightarrow \quad k+2k+3k+4k+5k+6k=1$$

$$\Leftrightarrow \quad 21k=1$$

$$\Leftrightarrow \quad k=\frac{1}{21}$$

Ainsi :

$$p(\mathrm{A})=p(2)+p(4)+p(6)=2k+4k+6k=12k=12\times\frac{1}{21}=\frac{12}{21}=\frac{4}{7}$$

$$p(\mathrm{B})=p(3)+p(4)+p(5)+p(6)=3k+4k+5k+6k=18k=18\times\frac{1}{21}=\frac{18}{21}=\frac{6}{7}$$

$$p(\mathrm{C})=p(3)+p(4)=3k+4k=7k=7\times\frac{1}{21}=\frac{7}{21}$$

b) *Calculez la probabilité conditionnelle* $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$.

$$p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})=\frac{p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{p(\mathrm{A})}$$

Or $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$ est l'ensemble des numéros pairs supérieurs ou égaux à 3 :

$$p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=p(4)+p(6)=4k+6k=10k=10\times\frac{1}{21}=\frac{10}{21}$$

Ainsi : $$p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})=\frac{p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{p(\mathrm{A})}\frac{\frac{10}{21}}{\frac{4}{7}}=\frac{10}{21}\times\frac{7}{4}=\frac{5}{6}$$

c) *A et B sont-ils indépendants ? A et C ?*

$$p(\mathrm{B})=\frac{6}{7}\quad\text{et}\quad p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})=\frac{5}{6}$$

→ $p(\mathrm{B})\neq p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$: les évènements A et B ne sont pas indépendants.

$\mathrm{A}\cap\mathrm{C}$ est l'ensemble des numéros pairs compris entre 3 et 4, soit la valeur 4 :

$$p(\mathrm{A}\cap\mathrm{C})=p(4)=4k=4k=10\times\frac{1}{21}=\frac{4}{21}$$

$$p(\mathrm{A})\times p(\mathrm{C})=\frac{4}{7}\times\frac{7}{21}=\frac{4}{21}$$

→ $p(\mathrm{A}\cap\mathrm{C})=p(\mathrm{A})\times p(\mathrm{C})$: les évènements A et C sont indépendants.

Exercice 1C.3

On tire au sort un individu dans une population test, formée à 60 % de personnes portant des lunettes de vue, et à 40 % de personnes n'en portant pas.
On sait de plus que 30 % des individus de cette population test sont diplômés de l'enseignement supérieur.
Déterminer une condition pour que les évènements « l'individu choisi porte des lunettes » et « l'individu choisi est diplômé du supérieur » soient indépendants.

Soit L l'évènement « l'individu choisi porte des lunettes » et D l'évènement « l'individu choisi est diplômé du supérieur ». On a :

$$p(\mathrm{L})=0,6\quad\text{et}\quad p(\mathrm{D})=0,3.$$

Si les deux évènements sont indépendants, alors :

$$p(\mathrm{L}\cap\mathrm{D})=p(\mathrm{L})\times p(\mathrm{D})=0,6\times0,3=0,18$$

→18 % de cette population test porte des lunettes de vue et est diplômée du supérieur

$$p_{\mathrm{L}}(\mathrm{D})=p(\mathrm{D})=0,3$$

→par les personnes portant des lunettes, 30 % sont diplômées du supérieur

$$p_{\mathrm{D}}(\mathrm{L})=p(\mathrm{L})=0,6$$

→par les personnes diplômées du supérieur, 60 % portent des lunettes

Exercice 1C.4

Soient deux évènements A et B tels que : $p(\mathrm{A})=0,4$ *et* $p(\mathrm{B})=0,3$.

a) *Calculer* $p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$ *et* $p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})$ *sachant que A et B sont indépendants.*

$$p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=p(\mathrm{A})\times p(\mathrm{B})=0,4\times0,3=0,12$$

$$p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=p(\mathrm{A})+p(\mathrm{B})-p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=0,4+0,3-0,12=0,58$$

b) *Calculer* $p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$ *et* $p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})$ *sachant que A et B sont incompatibles.*

A et B sont incompatibles ou disjoints donc

$$p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=0$$

D'où : $$p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=p(\mathrm{A})+p(\mathrm{B})=0,4+0,3=0,7$$

Exercice 1C.5

Soient deux évènements A et B vérifiant : $p(\mathrm{A})=0,4$; $p(\mathrm{B})=0,3$ *et* $p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=0,58$.

A et B sont-ils indépendants ?

$$p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B}) - p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$$

Donc : $$p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B}) - p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}) = 0,4 + 0,3 - 0,58 = 0,12$$