Rappels sur les évènements indépendants

Exercice 1D.1

On lance successivement deux fois un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
Etudier l'indépendance des évènements suivants :

a) A : « 3 sort en premier » et B : « 5 sort en second » ;
b) C : « 5 sort en premier » et D : « 5 sort deux fois » ;
c) E : « 1 sort en premier » et F : « 6 sort une fois » ;
d) Trouver deux évènements G et H distincts des précédents et indépendants.

Exercice 1D.2

Dans une urne sont placés 100 jetons rouges dont 50 portent le numéro 0 et 50 portent le numéro 1.
On ajoute dans cette urne 30 jetons verts numérotés 0.
Combien de jetons verts numérotés 1 faut-il rajouter dans l'urne pour que les évènements A « le jeton est rouge » et B « le jeton est numéroté 0 » soient indépendants lors d'un tirage au hasard d'un jeton de cette urne ?

Exercice 1D.3

On lance simultanément deux dés équilibrés, un rouge et un vert, dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
On considère les évènements suivants :

- R : « le numéro sorti sur le dé rouge est pair » ;
- V : « le numéro sorti sur le dé vert est pair » ;
- S : « la somme des numéros sortis est paire ».

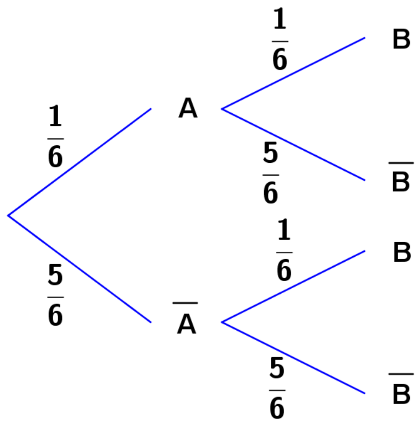
1) Démontrer que S et V sont indépendants.
2) Les évènements S et R sont-ils indépendants ?
3) Les évènements S et $V \cap R$ sont-ils indépendants ?

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. Quet

Exercice 1D.1

On lance successivement deux fois un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
Etudier l'indépendance des évènements suivants :

a) A : « 3 sort en premier » et B : « 5 sort en second » :



Le dé est équilibré donc $p(A)=\dfrac{1}{6}$.

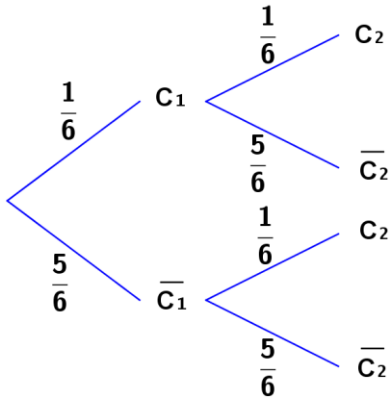
A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers, d'après la loi des probabilités totales :

$$p(B)=p(A\cap B)+p(\overline{A}\cap B)$$
$$=p(A)\times p_A(B)+p(\overline{A})\times p_{\overline{A}}(B)$$
$$=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}+\frac{5}{36}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

Ainsi : $p(A\cap B)=p(A)\times p_A(B)=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{36}$.

Et : $p(A)\times p(B)=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{36}=p(A\cap B)$: les évènements A et B sont indépendants.

b) C : « 5 sort en premier » et D : « 5 sort deux fois » :



Le dé est équilibré donc $p(C)=\dfrac{1}{6}$.

Succession d'évènements identiques et indépendants :

$$p(D)=p(C_1)\times p(C_2)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}.$$

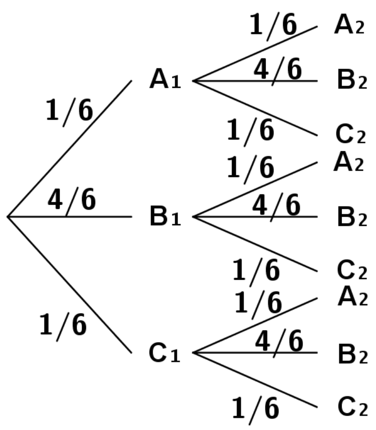
L'évènement $C\cap D$ est : « 5 sort en premier », donc :

$$p(C\cap D)=p(C)=\frac{1}{6}.$$

Or $p(C)\times p(D)=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{36}=\dfrac{1}{216}$

Les évènements C et D ne sont pas indépendants.

c) E : « 1 sort en premier » et F : « 6 sort une fois » :



Soit A l'évènement « on obtient un 1 », B l'évènement « on obtient 2, 3, 4 ou 5 » et C l'évènement « on obtient un 6 ».

Le dé est équilibré donc $p(E)=\dfrac{1}{6}$.

A, B et C forment une partition de l'univers, d'après la loi des probabilités totales :

$$p(F)=p(A_1\cap C_2)+p(B_1\cap C_2)+p(C_1\cap A_2)+p(C_1\cap B_2)$$
$$=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{4}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$$

L'évènement $E\cap F$ est « 1 sort en premier, 6 sort en deuxième »

Donc : $p(E\cap F)=p(A_1\cap C_2)=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{36}$

Or $p(E)\times p(F)=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{5}{18}=\dfrac{5}{108}$: les évènements E et F ne sont pas indépendants.

d) Trouver deux évènements G et H distincts des précédents et indépendants.
Les sélections de G et H doivent être différentes. Par exemple :
G l'évènement « le nombre obtenu est pair » et H « le nombre obtenu est impair ».

Exercice 1D.2

Dans une urne sont placés 100 jetons rouges dont 50 portent le numéro 0 et 50 portent le numéro 1.
On ajoute dans cette urne 30 jetons verts numérotés 0.
Combien de jetons verts numérotés 1 faut-il rajouter dans l'urne pour que les évènements A « le jeton est rouge » et B « le jeton est numéroté 0 » soient indépendants lors d'un tirage au hasard d'un jeton de cette urne ?

Soit x le nombre de jetons cherché afin d'atteindre cette indépendance :

- le nombre total de jetons est : $100+30+x=130+x$,
- le nombre de jetons rouges est : 100 ,
- le nombre de jetons verts est : $30+x$,
- le nombre de jetons numérotés 0 est : $50+30=80$,
- le nombre de jetons numérotés 1 est : $50+x$.

Ainsi :

$$p(\mathrm{A})=\frac{\text{nombre de jetons rouges}}{\text{nombre total de jetons}}=\frac{100}{130+x}$$
$$p(\mathrm{B})=\frac{\text{nombre de jetons numérotés 0}}{\text{nombre total de jetons}}=\frac{80}{130+x}$$
$$p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\frac{\text{nombre de jetons rouges numérotés 0}}{\text{nombre total de jetons}}=\frac{50}{130+x}.$$

Le critère d'indépendance recherché donne :

$$p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=p(\mathrm{A})\times p(\mathrm{B})$$
$$\Leftrightarrow \frac{50}{130+x}=\frac{100}{130+x}\times\frac{80}{130+x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{50}{130+x}=\frac{8000}{(130+x)^2}$$
$$\Leftrightarrow 50(130+x)^2=8000(130+x)$$
$$\Leftrightarrow (130+x)^2=160(130+x)$$
$$\Leftrightarrow 16900+260x+x^2=20800+160x$$
$$\Leftrightarrow 16900+260x+x^2-20800-160x=0$$
$$\Leftrightarrow x^2+100x-3900=0$$

$\Delta=100^2-4\times(-3900)=25600=160^2 \rightarrow \Delta>0$ donc deux solutions existent :

$$x_1=\frac{-100-160}{2\times1}=\frac{-260}{2}=-130 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-100+160}{2\times1}=\frac{60}{2}=30.$$

En retenant la solution positive, il faut ajouter 30 jetons verts numérotés 1 pour que les évènements A et B soient indépendants.

Exercice 1D.3

On lance simultanément deux dés équilibrés, un rouge et un vert, dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
On considère les évènements suivants :

- *R : « le numéro sorti sur le dé rouge est pair » ;*
- *V : « le numéro sorti sur le dé vert est pair » ;*
- *S : « la somme des numéros sortis est paire ».*

1) *Démontrer que S et V sont indépendants.*
2) *Les évènements S et R sont-ils indépendants ?*
3) *Les évènements S et* $\mathrm{V}\cap\mathrm{R}$ *sont-ils indépendants ?*

Un schéma est indispensable afin de déterminer des lois de probabilité.
Somme des deux lancers :

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

La loi de probabilité de la somme T est :

T	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(\mathrm{T})$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Ainsi, les dés étant équilibrés :

$$p(\mathrm{R})=\frac{1}{2} \quad , \quad p(\mathrm{V})=\frac{1}{2}$$

$$p(\mathrm{S})=p(\mathrm{T}=2)+p(\mathrm{T}=4)+p(\mathrm{T}=6)+p(\mathrm{T}=8)+p(\mathrm{T}=10)+p(\mathrm{T}=12)$$

$$=\frac{1}{36}+\frac{3}{36}+\frac{5}{36}+\frac{5}{36}+\frac{3}{36}+\frac{1}{36}=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$$

1) *Démontrer que S et V sont indépendants.*

$$p(\mathrm{S})\times p(\mathrm{V})=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	**4**	5	**6**	7	**8**
3	4	5	6	7	8	9
4	5	**6**	7	**8**	9	**10**
5	6	7	8	9	10	11
6	7	**8**	9	**10**	11	**12**

$$p(\mathrm{S}\cap\mathrm{V})=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}=p(\mathrm{S})\times p(\mathrm{V})$$

S et V sont indépendants.

2) *Les évènements S et R sont-ils indépendants ?*

De même : S et R sont indépendants.

3) *Les évènements S et* $\mathrm{V}\cap\mathrm{R}$ *sont-ils indépendants ?*

$$\mathrm{V}\cap\mathrm{R}=\{(2,2);(2,4);(2,6);(4,2);(4,4);(4,6);(6,2);(6,4);(6,6)\}$$

$$p(\mathrm{V}\cap\mathrm{R})=\frac{9}{36}=\frac{1}{4} \quad \text{donc : } \quad p(\mathrm{S})\times p(\mathrm{V}\cap\mathrm{R})=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$$

$$p(\mathrm{S}\cap(\mathrm{V}\cap\mathrm{R}))=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}\neq p(\mathrm{S})\times p(\mathrm{V}\cap\mathrm{R})$$

Les évènements S et $\mathrm{V}\cap\mathrm{R}$ ne sont pas indépendants.