Rappels sur les successions de deux épreuves indépendantes.

Exercice 1E.1

On lance 2 fois de suite un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on s'intéresse au nombre de 6 obtenus. On appelle A l'issue « on a obtenu un 6 » et $B = \overline{A}$ « on n'a pas obtenu un 6».
Quelle est la probabilité d'obtenir deux 6 ?

Exercice 1E.2

On lance 2 flèches sur une cible comportant trois secteurs numérotés 10 ; 5 ; 1 et on s'intéresse au nombre de points obtenus sachant que la flèche atteint toujours sa cible et :

- la probabilité que la flèche atteigne le 10 est 0,1 ,
- la probabilité que la flèche atteigne le 5 est 0,4 ,
- la probabilité que la flèche atteigne le 1 est 0,5.

On appelle D l'événement la flèche atteint le 10, C l'événement la flèche atteint le 5 et U l'événement la flèche atteint le 1.

1) Quelle est la probabilité d'obtenir un score supérieur ou égal à 12 ?
2) Quelle est la probabilité d'obtenir un score pair ?

Exercice 1E.3

On s'intéresse aux familles ayant 2 enfants. On appelle F l'événement « naissance d'une fille » et G « naissance d'un garçon ». On sait que en France $p(\text{F}) \approx 0{,}488$ et que $p(\text{G}) = 1 - p(\text{F}) \approx 0{,}512$.
Quelle est la probabilité d'obtenir deux filles ?

Exercice 1E.4

Une urne contient cinq jetons indiscernables au toucher : deux bleus, deux rouges et un noir. L'expérience aléatoire consiste à tirer au hasard successivement deux jetons de l'urne avec remise et à noter les deux couleurs obtenues.
On note B l'événement «tirer un jeton bleu» ; R l'événement «tirer un jeton rouge » et N l'événement «tirer un jeton noir».

a) Construire l'arbre pondéré associé à cette expérience.
b) Déterminer la probabilité d'obtenir l'issue $(\text{R};\text{N})$, puis celle de l'issue $(\text{R};\text{B})$.
c) On note U l'événement «obtenir un tirage Unicolore». Déterminer la probabilité de U.

Exercice 1E.5

Un dé à quatre face n'est pas équilibré, les probabilités sont :
0,1 pour la face "1", 0,2 pour la face "2", 0,3 pour la face "3" et 0,4 pour la face "4".
On lance deux fois de suite ce dé et on totalise les valeurs obtenues.

1) Quelle est la probabilité d'obtenir un score égal à 8 ?
2) Quelle est la probabilité d'obtenir un score inférieur ou égal à 3 ?
3) Quelle est la probabilité d'obtenir un score supérieur à 6 ?

Exercice 1E.6

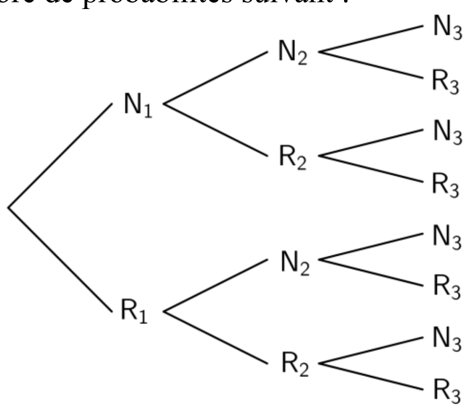
On considère trois urnes U_1, U_2, et U_3.

L'urne U_1 contient deux boules noires et trois boules rouges ; l'urne U_2 contient une boule noire et quatre boules rouges ; l'urne U_3 contient trois boules noires et quatre boules rouges.

Une expérience consiste à tirer au hasard une boule de U_1 et une boule de U_2, à les mettre dans U_3, puis à tirer au hasard une boule de U_3.

Pour *i* prenant les valeurs 1, 2 et 3, on désigne par N_i, (respectivement R_i) l'événement « on tire une boule noire de l'urne U_i » (respectivement « on tire une boule rouge de l'urne U_i »).

1) Reproduire et compléter l'arbre de probabilités suivant :



2) a) Calculer la probabilité des événements $N_1 \cap N_2 \cap N_3$ et $N_1 \cap R_2 \cap N_3$.
   b) En déduire la probabilité de l'événement $N_1 \cap N_3$.
   c) Calculer de façon analogue la probabilité de l'événement $R_1 \cap N_3$.
3) Déduire de la question précédente que $p\left(N_3\right) = \frac{2}{5}$.
4) Les événements N_1 et N_3 sont-ils indépendants ?
5) Sachant que la boule tirée dans U_3 est noire, quelle est la probabilité que la boule tirée de U_1 soit rouge ?

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier

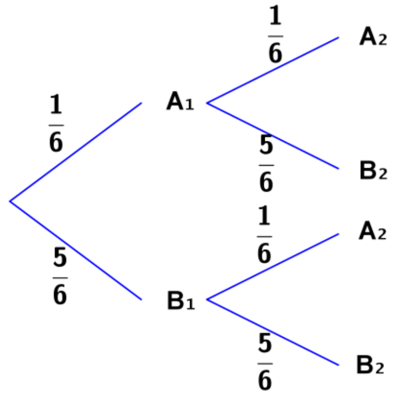
Exercice 1E.1

On lance 2 fois de suite un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on s'intéresse au nombre de 6 obtenus. On appelle A l'issue « on a obtenu un 6 » et $\mathrm{B}=\overline{\mathrm{A}}$ *« on n'a pas obtenu un 6».*

Quelle est la probabilité d'obtenir deux 6 ?

Représentons la situation à l'aide d'un arbre de probabilité,

sachant que $p(\mathrm{A})=\dfrac{1}{6}$ et $p(\mathrm{B})=\dfrac{5}{6}$.



La probabilité d'avoir deux 6 est : $p(\mathrm{A}_1\cap\mathrm{A}_2)$.

D'après la loi des probabilités conditionnelles :

→les évènements A_1 et A_2 sont indépendants :

$$p(\mathrm{A}_1\cap\mathrm{A}_2)=p(\mathrm{A}_1)\times p(\mathrm{A}_2)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$$

Exercice 1E.2

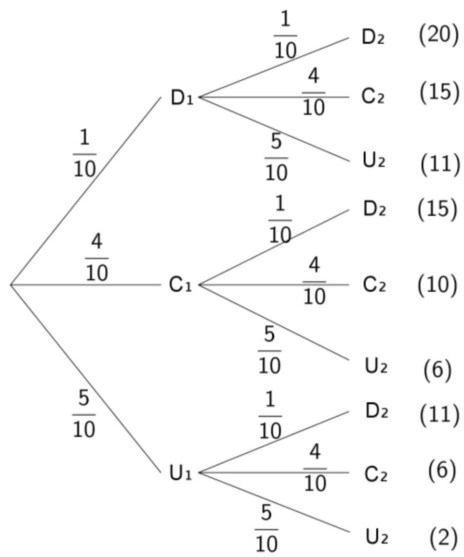
On lance 2 flèches sur une cible comportant trois secteurs numérotés 10 ; 5 ; 1 et on s'intéresse au nombre de points obtenus sachant que la flèche atteint toujours sa cible et :

- *la probabilité que la flèche atteigne le 10 est 0,1 ,*
- *la probabilité que la flèche atteigne le 5 est 0,4 ,*
- *la probabilité que la flèche atteigne le 1 est 0,5.*

On appelle D l'événement la flèche atteint le 10, C l'événement la flèche atteint le 5 et U l'événement la flèche atteint le 1.

1) *Quelle est la probabilité d'obtenir un score supérieur ou égal à 12 ?*

La probabilité cherchée est, en utilisant la loi des probabilités conditionnelles, les évènements étant indépendants :



$$\begin{aligned}&p(\mathrm{D}_1\cap\mathrm{D}_2)+p(\mathrm{D}_1\cap\mathrm{C}_2)+p(\mathrm{C}_1\cap\mathrm{D}_2)\\&=p(\mathrm{D}_1)\times p(\mathrm{D}_2)+p(\mathrm{D}_1)\times p(\mathrm{C}_2)+p(\mathrm{C}_1)\times p(\mathrm{D}_2)\\&=\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}+\frac{1}{10}\times\frac{4}{10}+\frac{4}{10}\times\frac{1}{10}=\frac{9}{100}\end{aligned}$$

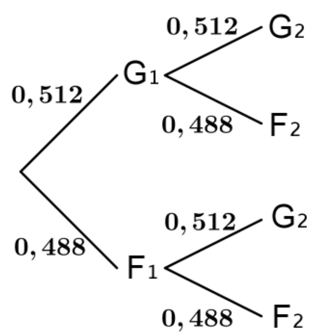
2) *Quelle est la probabilité d'obtenir un score pair ?*

$$\begin{aligned}&p(\mathrm{D}_1\cap\mathrm{D}_2)+p(\mathrm{C}_1\cap\mathrm{C}_2)+p(\mathrm{C}_1\cap\mathrm{U}_2)+p(\mathrm{U}_1\cap\mathrm{C}_2)+p(\mathrm{U}_1\cap\mathrm{U}_2)\\&=p(\mathrm{D}_1)\times p(\mathrm{D}_2)+p(\mathrm{C}_1)\times p(\mathrm{C}_2)+\ldots+p(\mathrm{U}_1)\times p(\mathrm{U}_2)\\&=\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}+\frac{4}{10}\times\frac{4}{10}+\frac{4}{10}\times\frac{5}{10}+\frac{5}{10}\times\frac{4}{10}+\frac{5}{10}\times\frac{5}{10}\\&=\frac{1}{100}+\frac{16}{100}+\frac{20}{100}+\frac{20}{100}+\frac{25}{100}=\frac{82}{100}=0{,}82\end{aligned}$$

Exercice 1E.3

On s'intéresse aux familles ayant 2 enfants. On appelle F l'événement « naissance d'une fille » et G « naissance d'un garçon ».

On sait que en France $p(\mathrm{F})\approx 0{,}488$ *et que* $p(\mathrm{G})=1-p(\mathrm{F})\approx 0{,}512$*.*



Quelle est la probabilité d'obtenir deux filles ?

D'après la loi des probabilités conditionnelles avec F_1 et F_2 indépendants :

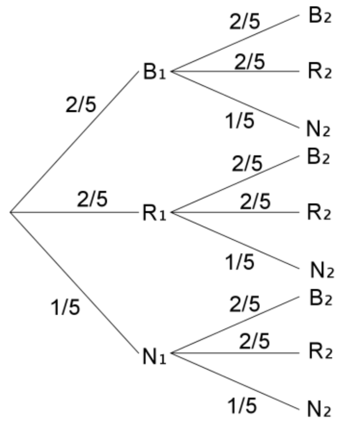
$$p(\mathrm{F}_1\cap\mathrm{F}_2)=p(\mathrm{F}_1)\times p(\mathrm{F}_2)=0{,}488\times0{,}488\simeq0{,}238$$

Exercice 1E.4

Une urne contient cinq jetons indiscernables au toucher : deux bleus, deux rouges et un noir. L'expérience aléatoire consiste à tirer au hasard successivement deux jetons de l'urne avec remise et à noter les deux couleurs obtenues.

On note B l'événement «tirer un jeton bleu» ; R l'événement «tirer un jeton rouge » et N l'événement «tirer un jeton noir».

a) *Construire l'arbre pondéré associé à cette expérience.*



b) *Déterminer la probabilité d'obtenir l'issue* $(\mathrm{R};\mathrm{N})$, *puis celle de l'issue* $(\mathrm{R};\mathrm{B})$.

Loi des probabilités conditionnelles, avec R_1 et N_2 indépendants :

$$p(\mathrm{R}_1 \cap \mathrm{N}_2) = p(\mathrm{R}_1) \times p(\mathrm{N}_2) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{25}$$

$$p(\mathrm{R}_1 \cap \mathrm{B}_2) = p(\mathrm{R}_1) \times p(\mathrm{B}_2) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$$

c) *On note U l'événement «obtenir un tirage Unicolore». Déterminer la probabilité de U.*

$$\begin{aligned} p(\mathrm{U}) &= p(\mathrm{B}_1 \cap \mathrm{B}_2) + p(\mathrm{R}_1 \cap \mathrm{R}_2) + p(\mathrm{N}_1 \cap \mathrm{N}_2) \\ &= p(\mathrm{B}_1) \times p(\mathrm{B}_2) + p(\mathrm{R}_1) \times p(\mathrm{R}_2) + p(\mathrm{N}_1) \times p(\mathrm{N}_2) \\ &= \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \\ &= \frac{9}{25} \end{aligned}$$

Exercice 1E.5

Un dé à quatre face n'est pas équilibré, les probabilités sont :

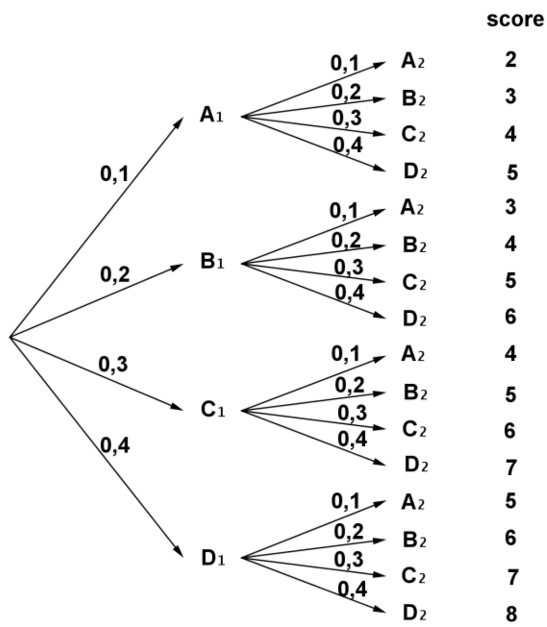
0,1 pour la face "1", 0,2 pour la face "2", 0,3 pour la face "3" et 0,4 pour la face "4".

On lance deux fois de suite ce dé et on totalise les valeurs obtenues.

1) *Quelle est la probabilité d'obtenir un score égal à 8 ?*
2) *Quelle est la probabilité d'obtenir un score inférieur ou égal à 3 ?*
3) *Quelle est la probabilité d'obtenir un score supérieur à 6 ?*

Soit A, B, C et D les évènements respectifs « on obtient un 1 », « on obtient un 2 », « on obtient un 3 » et « on obtient un 4 ».

Voici l'arbre représentant cette situation :



1) Loi des probabilités conditionnelles :

$$p(\mathrm{D}_1 \cap \mathrm{D}_2) = p(\mathrm{D}_1) \times p_{\mathrm{D}_1}(\mathrm{D}_2) = 0,4 \times 0,4 = 0,16$$

2)
$$\begin{aligned} &p(\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{A}_2) + p(\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{B}_2) + p(\mathrm{B}_1 \cap \mathrm{A}_2) \\ &= 0,1 \times 0,1 + 0,1 \times 0,2 + 0,2 \times 0,1 \\ &= 0,05 \end{aligned}$$

3)
$$\begin{aligned} &p(\mathrm{C}_1 \cap \mathrm{D}_2) + p(\mathrm{D}_1 \cap \mathrm{C}_2) + p(\mathrm{D}_1 \cap \mathrm{D}_2) \\ &= 0,3 \times 0,4 + 0,4 \times 0,3 + 0,4 \times 0,4 \\ &= 0,4 \end{aligned}$$

Exercice 1E.6

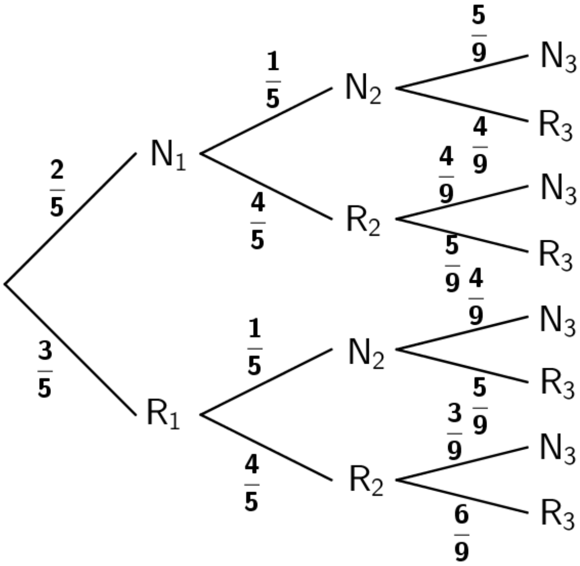
On considère trois urnes U_1, U_2, *et* U_3.

L'urne U_1 *contient deux boules noires et trois boules rouges ; l'urne* U_2 *contient une boule noire et quatre boules rouges ; l'urne* U_3 *contient trois boules noires et quatre boules rouges.*

Une expérience consiste à tirer au hasard une boule de U_1 *et une boule de* U_2, *à les mettre dans* U_3, *puis à tirer au hasard une boule de* U_3.

Pour i prenant les valeurs 1, 2 et 3, on désigne par N_i, *(respectivement* R_i*) l'événement « on tire une boule noire de l'urne* U_i *» (respectivement « on tire une boule rouge de l'urne* U_i *»).*

1) *Reproduire et compléter l'arbre de probabilités suivant :*



2) a) *Calculer la probabilité des événements* $\mathrm{N}_1 \cap \mathrm{N}_2 \cap \mathrm{N}_3$ *et* $\mathrm{N}_1 \cap \mathrm{R}_2 \cap \mathrm{N}_3$.

$$p\left(\mathrm{N}_1 \cap \mathrm{N}_2 \cap \mathrm{N}_3\right) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{5}{9} = \frac{2}{45}$$

$$p\left(\mathrm{N}_1 \cap \mathrm{R}_2 \cap \mathrm{N}_3\right) = \frac{2}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{9} = \frac{32}{225}$$

b) *En déduire la probabilité de l'événement* $\mathrm{N}_1 \cap \mathrm{N}_3$.

$$p\left(\mathrm{N}_1 \cap \mathrm{N}_3\right) = p\left(\mathrm{N}_1 \cap \mathrm{N}_2 \cap \mathrm{N}_3\right) + p\left(\mathrm{N}_1 \cap \mathrm{R}_2 \cap \mathrm{N}_3\right) = \frac{2}{45} + \frac{32}{225} = \frac{42}{225}$$

c) *Calculer de façon analogue la probabilité de l'événement* $\mathrm{R}_1 \cap \mathrm{N}_3$.

$$p\left(\mathrm{R}_1 \cap \mathrm{N}_3\right) = p\left(\mathrm{R}_1 \cap \mathrm{N}_2 \cap \mathrm{N}_3\right) + p\left(\mathrm{R}_1 \cap \mathrm{R}_2 \cap \mathrm{N}_3\right)$$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{9} + \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{9} = \frac{12}{225} + \frac{36}{225} = \frac{48}{225}$$

3) *Déduire de la question précédente que* $p\left(\mathrm{N}_3\right) = \frac{2}{5}$.

N_1 et R_1 forment une partition de l'univers, d'après la loi des probabilités totales :

$$p\left(\mathrm{N}_3\right) = p\left(\mathrm{N}_1 \cap \mathrm{N}_3\right) + p\left(\mathrm{R}_1 \cap \mathrm{N}_3\right) = \frac{42}{225} + \frac{48}{225} = \frac{90}{225} = \frac{\boxed{45} \times 2}{\boxed{45} \times 5} = \frac{2}{5}$$

4) *Les événements* N_1 *et* N_3 *sont-ils indépendants ?*

$$p\left(\mathrm{N}_1 \cap \mathrm{N}_3\right) = \frac{42}{225} \quad \text{et} \quad p\left(\mathrm{N}_1\right) \times p\left(\mathrm{N}_3\right) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$$

$p\left(\mathrm{N}_1 \cap \mathrm{N}_3\right) \neq p\left(\mathrm{N}_1\right) \times p\left(\mathrm{N}_3\right)$: les évènements N_1 et N_3 ne sont pas indépendants.

5) *Sachant que la boule tirée dans* U_3 *est noire, quelle est la probabilité que la boule tirée de* U_1 *soit rouge ?*

$$p_{N_3}\left(R_1\right)=\frac{p\left(R_1\cap N_3\right)}{p\left(N_3\right)}=\frac{\frac{48}{225}}{\frac{2}{5}}=\frac{48}{225}\times\frac{5}{2}=\frac{24}{45}$$