Rappels sur les Variables aléatoires

Ex 1G.1 : Un jeu consiste à lancer un dé non pipé
- si le joueur obtient un 1, il perd 30 €
- si le joueur obtient un 2, il perd 20 €
- si le joueur obtient un 3, il perd 10 €
- si le joueur obtient un 4, il ne perd ni ne gagne rien
- si le joueur obtient un 5 ou un 6, il gagne 30 €

Soit X la variable aléatoire indiquant le gain (positif ou négatif) du joueur : donner la loi de probabilité de X
Calculer l'espérance (la variance et l'écart-type de cette loi ne sont plus au programme)

Ex 1G.2 : Pierre et Anne jouent à pile ou face ; elles misent 5 € chacune.
→ si le résultat est face, Pierre ramasse les mises ; si le résultat est pile, Anne ramasse les mises.
Soit X la variable aléatoire donnant le gain de Pierre : calculer l'espérance mathématique E(X).
conseil : il est bien sûr utile de donner la loi de probabilité de X.

Ex 1G.3 : Un enfant lance simultanément trois pièces de monnaie de 1F, 2F et 5F. Il totalise les francs des pièces qui présentent le côté face.
Soit X la variable aléatoire comptant ce total en francs :
1) donner la loi de probabilité de X
2) calculer $p(X \leq 2)$ et $p(X > 6)$
3) calculer E(X)
4) calculer la variance et l'écart-type.

conseil : pour le 1) , on pourra s'aider d'un arbre

Ex 1G.4 : dans une urne, il y a 15 boules dont 3 boules rouges, 7 boules vertes et 5 boules jaunes.
Un joueur tire une boule au hasard :
- si elle est rouge, il perd 50 €
- si elle est verte, il gagne 20 €
- si elle est jaune, il gagne *x* €.

Trouver *x* pour que le jeu soit équitable.
conseil : on dit qu'un jeu est équitable lorsque E(X) = 0

Ex 1G.5 :
On lance deux dés équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
L'ensemble E des couples (*x* ; y), avec $1 \leq x \leq 6$ et $1 \leq y \leq 6$, est muni de la loi équirépartie (c'est à dire toutes les issues sont équiprobables).
A chaque couple (*x* ; y), on associe la valeur absolue de la différence : $| x - y |$.
On définit ainsi une variable aléatoire X sur l'ensemble E.
1) Définir la loi de probabilité de X.

6						
5						
4						
3						
2						
1						
y ***x***	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

Loi de X :

k	0	1	2	3	4	5
P (X = k)						

2) Calculer l'espérance et la variance de X.

Ex 1G.1 : Les valeurs prises par la variable aléatoire X sont : -30 ; -20 ; 0 et 30

$$p(\mathrm{X}=-30)=\frac{1}{6}\ .;\ p(\mathrm{X}=-20)=\frac{1}{6}\ ;\ p(\mathrm{X}=-10)=\frac{1}{6}\ .;\ p(\mathrm{X}=0)=\frac{1}{6}\ ;\ p(\mathrm{X}=30)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

D'où la loi de probabilité de X :

a_i	-30	-20	-10	0	30
$p(\mathrm{X}=a_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

on vérifie que : $\sum_i p_i = 1$

Espérance :

$$\mathrm{E}(\mathrm{X})=\sum_{i=1}^{5} a_i \times p_i = -30\times\frac{1}{6}-20\times\frac{1}{6}-10\times\frac{1}{6}+0\times\frac{1}{6}+30\times\frac{1}{3}=-5-\frac{10}{3}-\frac{5}{3}+0+10=5-\frac{15}{3}=0$$

La variance et l'écart-type ne sont plus au programme :

$$\mathrm{V}(\mathrm{X})=\sum p_i\times(a_i)^2-(\mathrm{E}(\mathrm{X}))^2=\frac{1}{3}\times(-30)^2+\frac{1}{6}\times(-20)^2+\frac{1}{6}\times(-10)^2+\frac{1}{6}\times0^2+\frac{1}{3}\times30^2-\left(-\frac{10}{3}\right)^2$$

$$=\frac{900}{3}+\frac{400}{6}+\frac{100}{6}+\frac{900}{3}-\frac{100}{9}=\frac{2200}{3}$$

$$\sigma(\mathrm{X})=\sqrt{\mathrm{V}(\mathrm{X})}=\sqrt{\frac{2200}{3}}$$

Ex 1G.2 : Pierre et Anne misent 5 € chacune donc une somme totale de 10 € :
si le résultat est face, Pierre ramasse les 10 € : il a donc gagné 5 €
si le résultat est pile, Anne ramasse les mises : Pierre perd donc 5 €
Les valeurs prises par la variable aléatoire X sont donc 5 et –5

avec $p(\mathrm{X}=5)=p(\mathrm{X}=-5)=\frac{1}{2}$

D'où la loi de probabilité de X :

a_i	-5	5
$p(\mathrm{X}=a_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

on vérifie que : $\sum_i p_i = 1$

Espérance :

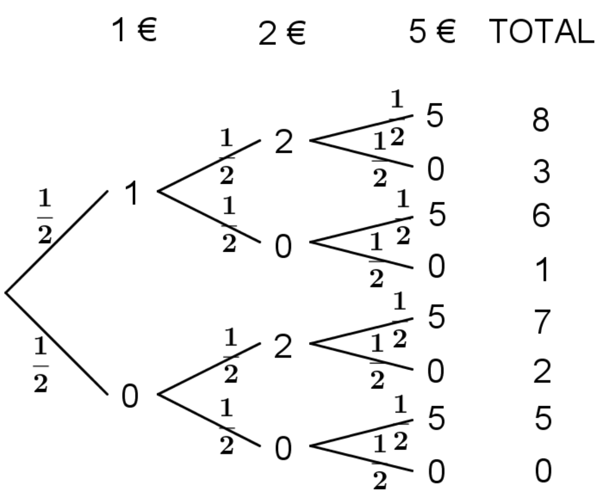
$$\mathrm{E}(\mathrm{X})=\sum_{i=1}^{2} a_i \times p_i = -5\times\frac{1}{2}+5\times\frac{1}{2}=0$$ donc **le jeu est équitable**

Variance et écart-type :

$$\mathrm{V}(\mathrm{X})=\sum p_i\times(x_i)^2-(\mathrm{E}(\mathrm{X}))^2=\frac{1}{2}\times5^2+\frac{1}{2}\times(-5)^2-0^2=\frac{25+25}{2}=25$$

$$\sigma(\mathrm{X})=\sqrt{\mathrm{V}(\mathrm{X})}=\sqrt{25}=5$$

Ex 1G.3 :



Les valeurs prises par X sont : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8.
D'où la loi de probabilité de X :

Valeurs de X	0	1	2	3	5	6	7	8
Probabilité $p(\mathrm{X}=a_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

2) $p(X \le 2) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) = \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\mathbf{\frac{3}{8}}$

$p(X > 6) = p(X = 7) + p(X = 8) = \frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\mathbf{\frac{1}{4}}$

3) $\mathrm{E}(\mathrm{X})=\sum_{i=1}^{8} a_i \times p(\mathrm{X}=a_i)=0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{1}{8}+2\times\frac{1}{8}+3\times\frac{1}{8}+5\times\frac{1}{8}+6\times\frac{1}{8}+7\times\frac{1}{8}+8\times\frac{1}{8}$

$\mathrm{E}(\mathrm{X})=0+\frac{1}{8}+\frac{2}{8}+\frac{3}{8}+\frac{5}{8}+\frac{6}{8}+\frac{7}{8}+\frac{8}{8}=\frac{32}{8}=4$

Si le joueur répète ce jeu un grand nombre de fois, il gagnera en moyenne un total de 4 €.

La variance et l'écart-type ne sont plus au programme :

4) $\mathrm{V}(\mathrm{X})=\sum p_i \times (x_i)^2-(\mathrm{E}(\mathrm{X}))^2$

$=\frac{1}{8}\times 0^2+\frac{1}{8}\times 1^2+\frac{1}{8}\times 2^2+\frac{1}{8}\times 3^2+\frac{1}{8}\times 4^2+\frac{1}{8}\times 5^2+\frac{1}{8}\times 6^2+\frac{1}{8}\times 7^2+\frac{1}{8}\times 8^2-4^2$

$=\frac{0+1+4+9+16+25+36+49+64}{8}-16$

$=\frac{204}{8}-16=\frac{51}{2}-\frac{32}{2}=\frac{19}{2}=9{,}5$

5) $\sigma(\mathrm{X})=\sqrt{\mathrm{V}(\mathrm{X})}=\sqrt{9{,}5}$

Ex 1G.4 : Les valeurs prises par la variable aléatoire X sont : -50 ; 20 et x.
Or il y a 15 boules dont 3 rouges, 7 vertes et 5 jaunes

donc $p(\mathrm{X}=-50)=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$, $p(\mathrm{X}=20)=\frac{7}{15}$, $p(\mathrm{X}=x)=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$

D'où la loi de probabilité de X :

a_i	-50	20	x
$p(\mathrm{X}=a_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{3}$

on vérifie que : $\sum_i p_i = 1$

Espérance :

$$\mathrm{E}(\mathrm{X})=\sum_{i=1}^{3} a_i \times p_i = -50\times\frac{1}{5}+20\times\frac{7}{15}+x\times\frac{1}{3}=-10+\frac{4\times5\times7}{3\times5}+\frac{x}{3}=-\frac{30}{3}+\frac{28}{3}+\frac{x}{3}=\frac{x}{3}-\frac{2}{3}$$

Or le jeu est équitable lorsque $\mathrm{E}(\mathrm{X})=0$ donc on résout l'équation :

$$\frac{x}{3}-\frac{2}{3}=0 \Leftrightarrow \frac{x}{3}=\frac{2}{3} \Leftrightarrow x=2$$

Ainsi **le jeu est équitable lorsque *x* = 2 €.**

Ex 1G.5 :

On lance deux dés équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
L'ensemble E des couples (x ; y), avec $1 \le x \le 6$ et $1 \le y \le 6$, est muni de la loi équirépartie (c'est à dire toutes les issues sont équiprobables).
A chaque couple (x ; y), on associe la valeur absolue de la différence des deux dés : $| x - y |$.
On définit ainsi une variable aléatoire X sur l'ensemble E.
1) Définir la loi de probabilité de X.

E est l'ensemble des 36 couples de faces (équiprobables) → un tableau est fort utile.

6	5	4	3	2	1	0
5	4	3	2	1	0	1
4	3	2	1	0	1	2
3	2	1	0	1	2	3
2	1	0	1	2	3	4
1	0	1	2	3	4	5
y / ***x***	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

Loi de probabilité de X :

k	0	1	2	3	4	5
P (X = k)	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$

2) Espérance de X.

$$\mathrm{E}(\mathrm{X})=\sum_{i=1}^{6} k_i \times p_i = 0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{5}{18}+2\times\frac{2}{9}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{9}+5\times\frac{1}{18}$$

$$=\frac{5}{18}+\frac{4}{9}+\frac{3}{6}+\frac{4}{9}+\frac{5}{18}$$

$$=\frac{5}{18}+\frac{8}{18}+\frac{9}{18}+\frac{8}{18}+\frac{5}{18}$$

$$=\frac{35}{18}$$

Variance : $\mathrm{V}(\mathrm{X}) = \frac{665}{324} \approx 2{,}052$