Rappel : Si X est une variable aléatoire discrète

Espérance :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

Variance :

$$\text{Var}X = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

Ecart-type :

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}X}$$

EXERCICE 4A.1

Dans une usine qui fabrique des ampoules électriques, grâce à des tests, on parvient à définir la variable aléatoire X qui à une ampoule prise au hasard associe sa durée de vie (en jours).

Voici la loi de probabilité de X :

Valeurs de X	123	124	125	126	127
$p(X = x_i)$	0,03	0,24	0,46	0,23	0,04

Déterminer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X.

EXERCICE 4A.2

1. On invente un jeu d'argent qui fonctionne de la façon suivante :

- Je lance un dé à 6 faces, non pipé.
- Si j'obtiens 2, 3, 4 ou 5, je ne gagne rien.
- Si j'obtiens 1, je gagne 1€.
- Si j'obtiens 6, je gagne 11€

On appelle X la loi de probabilité qui correspond au gain du joueur.

a. Ecrire la loi de probabilité de X.

b. Calculer l'espérance et l'écart-type de X.

2. Evidemment, ce jeu d'argent n'est pas gratuit : pour jouer, il faut d'abord miser 2€. On appelle Y la variable aléatoire qui représente le *gain net*, c'est-à-dire « gain – mise ».

a. Ecrire la loi de probabilité de Y.

b. Calculer l'espérance et l'écart-type de Y.

EXERCICE 4A.3

Le LOTO permet de gagner beaucoup d'argent en choisissant 5 numéros parmi 49 dans une grille et un numéro chance parmi 10.

Voici le tableau des gains :

Combinaison	1 chance sur…	Gain (brut)
5 n°+ n°chance	19 068 840	3 000 000 €
5 n°	2 118 760	100 000 €
4 n°	211 876	750 €
3 n°	18 424	8 €
2 n°	1 176	4 €
n° chance	10	2 €

Sachant que la mise est de 2€ par grille, déterminer la loi de probabilité du gain net, son espérance mathématique, sa variance et son écart-type.

CORRIGE – Notre Dame de la Merci – Montpellier

EXERCICE 4A.1

Dans une usine qui fabrique des ampoules électriques, grâce à des tests, on parvient à définir la variable aléatoire X qui à une ampoule prise au hasard associe sa durée de vie (en jours).
Voici la loi de probabilité de X :

Valeurs de X	123	124	125	126	127
$p(X = x_i)$	0,03	0,24	0,46	0,23	0,04

Déterminer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X.

ESPERANCE :

$$E(X) = 0,03\times123+0,24\times124+0,46\times125+0,23\times126+0,04\times127=125,01$$

VARIANCE :

$$V(X) = E(X^2)-(E(X))^2$$
$$= 0,03\times123^2+0,24\times124^2+0,46\times125^2+0,23\times126^2+0,04\times127^2-125,01^2$$
$$= 0,7499$$

ECART-TYPE :

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{0,7499}\simeq 0,866$$

EXERCICE 4A.2

1. *On invente un jeu d'argent qui fonctionne de la façon suivante :*
- *Je lance un dé à 6 faces, non pipé.*
- *Si j'obtiens 2, 3, 4 ou 5, je ne gagne rien.*
- *Si j'obtiens 1, je gagne 1€.*
- *Si j'obtiens 6, je gagne 11€*

On appelle X la loi de probabilité qui correspond au gain du joueur.

a. *Ecrire la loi de probabilité de X.*

X peut prendre les valeurs 0, 1 et 11.

$$p(X=0)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3},\ p(X=1)=\frac{1}{6}\quad \text{et}\quad p(X=11)=\frac{1}{6}$$

X	0	1	11	Total
$p(X)$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{6}{6}$

b. *Calculer l'espérance et l'écart-type de X.*

$$E(X)=\frac{4}{6}\times0+\frac{1}{6}\times1+\frac{1}{6}\times11=\frac{1}{6}+\frac{11}{6}=\frac{12}{6}=2$$

$$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$$
$$=\frac{4}{6}\times0^2+\frac{1}{6}\times1^2+\frac{1}{6}\times11^2-2^2$$
$$=\frac{1}{6}+\frac{121}{6}-4=\frac{122}{6}-\frac{24}{6}=\frac{98}{6}=\frac{49}{3}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{49}{3}}\simeq 4,041$$

2. *Evidemment, ce jeu d'argent n'est pas gratuit : pour jouer, il faut d'abord miser 2€. On appelle Y la variable aléatoire qui représente le gain net, c'est-à-dire « gain – mise ».*

a. *Ecrire la loi de probabilité de Y.*

Y peut prendre les valeurs -2, -1 et 9.

$p(Y=-2)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$, $p(Y=-1)=\frac{1}{6}$ et $p(Y=9)=\frac{1}{6}$

Y	-2	-1	9	Total
$p(Y)$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{6}{6}$

b. *Calculer l'espérance et l'écart-type de Y.*

Nous allons vérifier que l'espérance a baissé de 2€ et que la mesure de la dispersion des valeurs par la variance est restée identique :

$E(Y)=\frac{4}{6}\times(-2)+\frac{1}{6}\times(-1)+\frac{1}{6}\times 9=\frac{-8}{6}-\frac{1}{6}+\frac{9}{6}=0$: ce jeu est équitable.

$$V(Y)=E(Y^2)-(E(Y))^2$$
$$=\frac{4}{6}\times(-2)^2+\frac{1}{6}\times(-1)^2+\frac{1}{6}\times 9^2-0^2$$
$$=\frac{4}{6}\times 4+\frac{1}{6}\times 1+\frac{1}{6}\times 81=\frac{16}{6}+\frac{1}{6}+\frac{81}{6}=\frac{98}{6}=\frac{49}{3}=V(X)$$

$$\sigma(Y)=\sqrt{V(Y)}=\sqrt{\frac{49}{3}}\simeq 4,041=\sigma(X)$$

Propriété : Propriétés de l'espérance et de la variance :
On considère deux variables aléatoires X et Y telles que $Y=aX+b$ (avec a et b réels). Alors :
1) $E(Y)=aE(X)+b$ 2) $V(Y)=a^2\times V(X)$ 3) $\sigma(Y)=|a|\times\sigma(X)$

→ici : $Y=X-2$ donc : $E(Y)=E(X)-2$ et $V(Y)=1^2\times V(X)=V(X)$.

EXERCICE 4A.3

Le LOTO permet de gagner beaucoup d'argent en choisissant 5 numéros parmi 49 dans une grille et un numéro chance parmi 10. Voici le tableau des gains :

Combinaison	*1 chance sur…*	*Gain (brut)*
5 n°+ n°chance	*19 068 840*	*3 000 000 €*
5 n°	*2 118 760*	*100 000 €*
4 n°	*211 876*	*750 €*
3 n°	*18 424*	*8 €*
2 n°	*1 176*	*4 €*
n° chance	*10*	*2 €*

Sachant que la mise est de 2€ par grille, déterminer la loi de probabilité du gain net, son espérance mathématique, sa variance et son écart-type.

Le gain net correspond au gain brut auquel on soustrait la mise engagée.
Soit X la variable aléatoire qui correspond aux différents gains nets.
X peut prendre les valeurs :

-2 , 0 , 2 , 6 , 748 , 99 998 , 2 999 998.

Certaines probabilités sont données dans l'énoncé, or la somme des probabilités de ces évènements disjoints est égale à 1, donc :

$$p(X=-2)=1-\frac{1}{10}-\frac{1}{1176}-\frac{1}{18424}-\frac{1}{211876}-\frac{1}{2118760}-\frac{1}{19068840}\simeq 0,8990901387$$

→comme $\frac{1}{19068840}\simeq 0,0000000524$, on va conserver une valeur très précise de $p(X=-2)$

On obtient la loi de probabilité de X :

X	-2	0	2	6	748	99 998	2 999 998	Total
$p(X)$	0,8990901387	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{1176}$	$\frac{1}{18424}$	$\frac{1}{211876}$	$\frac{1}{2118760}$	$\frac{1}{19068840}$	

Calcul de l'espérance :

$$E(X)=0,8990901387\times(-2)+\frac{1}{10}\times 0+\frac{1}{1176}\times 2+\frac{1}{18424}\times 6+\frac{1}{211876}\times 748+\frac{1}{2118760}\times 99998+\frac{1}{19068840}\times 2999998$$

$$E(X)\simeq -1,5881.$$

Calcul de la variance :

$$V(X)=0,8990901387\times(-2)^2+\frac{1}{10}\times 0^2+\frac{1}{1176}\times 2^2+\frac{1}{18424}\times 6^2+\frac{1}{211876}\times 748^2+\frac{1}{2118760}\times 99998^2+\frac{1}{19068840}\times 2999998^2-(-1,5881)^2$$

$$V(X)\simeq 476696,82.$$

Calcul de l'écart-type :

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{476696,82}\simeq 690,43$$