Exercices sur les loi binomiale

Exercice 3C.1

On effectue 50 tirages successifs avec remise d'une boule dans une urne contenant trois boules rouges, deux vertes et six jaunes.
Soit X la variable aléatoire comptabilisant le nombre de boules jaunes obtenues.

1) Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2) Quelle est la probabilité d'obtenir 25 boules jaunes ?
3) Quelle est la probabilité d'obtenir au maximum 30 boules jaunes ?
4) Quelle est la probabilité d'obtenir plus de 15 boules jaunes ?
5) Quelle est la probabilité d'obtenir entre 13 et 30 boules jaunes ?
6) Quelle est la probabilité d'obtenir moins de 22 boules jaunes ?

Exercice 3C.2 : **Loi binomiale : Utilisation de la calculatrice**

La variable aléatoire X suit la loi binomiale $B(20;0,6)$.

A la calculatrice, déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de :

a. $p(X=10)$
b. $p(X\leq 8)$
c. $p(X<12)$
d. $p(X>13)$

Exercice 3C.3 :

Un dé cubique possède deux faces noires et quatre faces blanches.
Quand on le lance, toutes les faces ont la même probabilité d'apparition.
On lance le dé huit fois : quelle est la probabilité qu'apparaisse une face supérieure noire :

1) 8 fois ?
2) au moins une fois ?

Exercice 3C.4 :

On tire successivement avec remise 8 cartes d'un jeu de 32. Quelle est la probabilité d'obtenir 5 cœurs ?

Exercice 3C.5 :

On lance 6 fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. Quelle est la probabilité d'obtenir :

a) Au plus deux "Piles" ?
b) Au moins un "Pile" ?

Exercice 3C.6 :

X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $B(n,p)$.

A l'aide votre calculatrice, donner le tableau de la loi de X dans les cas suivants :

a) $n=6$ et $p=0,4$
b) $n=9$ et $p=0,6$

Exercice 3C.7 :

X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $B(n,p)$.

A l'aide votre calculatrice, calculer les probabilités demandées dans les cas suivants :

a) $n=15$ et $p=0,8$. Calculer $p(X=8)$ et $p(X=12)$.

b) $n=10$ et $E(X)=3$. Calculer $p(X\le 3)$ et $p(X\ge 7)$.

c) $p=0,2$ et $\sigma=2$. Calculer $p(X\le 2)$ et $p(X<2)$.

Exercice 3C.8 :

La probabilité qu'une photocopieuse tombe en panne durant un mois donné est $p=0,05$.

Les pannes sont indépendantes les unes des autres.

Calculer les probabilités à 10^{-3} près que la photocopieuse :

a) ne tombe pas en panne durant 1 an ;
b) tombe en panne plus d'une fois durant cette année.

Exercice 3C.9 : Loi binomiale : Enquête de satisfaction

Un fournisseur d'accès internet effectue une enquête de satisfaction sur un panel de 2000 clients. L'enquête révèle que 75% des clients interrogés se déclarent satisfaits du service fourni.
On choisit au hasard trois clients parmi ceux du panel interrogé durant l'enquête. On admet que ce panel est suffisamment important pour assimiler ces choix à des tirages successifs indépendants avec remise.
Déterminer la probabilité qu'exactement un des clients choisis se déclare satisfait du service fourni (on donnera le résultat sous forme décimale arrondie au centième).

Exercice 3C.10 :

La variable aléatoire X suit la loi binomiale $B(10;0,4)$.

A la calculatrice, déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de :

a. $p(X=0)$
b. $p(X\le 5)$

On réalise un nombre indéfini n d'épreuves de cette expérience : la loi binomiale devient : $B(n;0,4)$.

A partir de combien d'épreuves sera-t-on certain que la probabilité d'avoir au moins un succès est supérieure à 99,5% c'est-à-dire pour quelle valeur de n aura-t-on : $p(X\ge 1)>0,995$?

Exercice 3C.11 :

D'après l'Insee, la proportion de femmes dans la population française est d'environ 51,6 %.
Un observateur se place à la sortie d'une gare et note le sexe des personnes qui passent.
On admettra que la proportion de femmes dans la population qui sort de la gare est identique à la proportion de femmes dans la population française.
On peut assimiler le passage des personnes à un schéma de Bernoulli.

1°) Déterminer la probabilité que les quatre premières personnes qui sortent soient toutes des hommes.
2°) Déterminer la probabilité que, sur les dix premières personnes qui sortent, il y ait exactement cinq femmes.
3°) a) Compléter, en utilisant une calculatrice ou un ordinateur, le tableau suivant correspondant à la loi de probabilité du nombre N de femmes parmi les dix premières personnes qui sortent. (On donnera les résultats à 10^{-4} près)

n_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p(X=n_i)$											

b) Justifier que $p(N\in[2;8])\ge 95\%$.

Exercice 3C.12 :

Une entreprise possède 50 ordinateurs.
La probabilité qu'un ordinateur tombe en panne est de 0,01.
On suppose que le fonctionnement d'un ordinateur est indépendant des autres.

1. Calculer la probabilité qu'aucun ordinateur ne tombe en panne.
2. Calculer la probabilité que 5 ordinateurs soient en panne.
3. Calculer la probabilité de l'événement E :_au moins un ordinateur est en panne _.
4. On note X la variable aléatoire donnant le nombre d'ordinateurs en panne parmi les 50 disponibles.

   a) Que signifie $p(X=3)$?

   Calculer ensuite $p(X=3)$

   b) Calculer $p(X\leq 3)$. Interpréter ce résultat.

   c) Calculer $E(X)$. Interpréter ce résultat.

Exercice 3C.13 :

Une épreuve consiste à lancer deux dés cubiques parfaits, l'un bleu et l'autre rouge, dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
On note S l'événement "la somme des numéros des deux dés est supérieure ou égale à 10".
On répète dix fois de suite cette épreuve dans les mêmes conditions.

1) Quelle est la probabilité de S lors d'une épreuve ?
2) Quelle est la probabilité d'obtenir trois fois la réalisation de S lors des dix épreuves ?
   On donnera la valeur arrondie à 10^{-3} près.
3) On répète cette épreuve n fois de suite.

   a) Prouver que la probabilité p, d'obtenir au moins une fois S est : $1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$

   b) Quel est le nombre minimum d'épreuves pour que p soit supérieure à 0,9 ?

Exercice 3C.14 :

Une entreprise dispose de deux machines « a » et « b » pour fabriquer le même type de pièces ;
Certaines, étant défectueuses, sont écartées :

pour « a », la probabilité d'obtenir une pièce sans défaut est 0,9

pour « b », cette probabilité est 0,95

La machine « a » fournit les deux tiers de la production, la machine « b » le tiers restant.

1) on choisit une pièce au hasard avec équiprobabilité des choix
   a) calculer la probabilité des événements suivants :
      A : « la pièce provient de la machine « a » »
      B : « la pièce provient de la machine « b » »
   b) soit S l'événement : « la pièce est sans défaut »
      calculer p(S/A) et p(S/B)
      en déduire que $p(S)=\frac{11}{12}$
2) on considère un échantillon de 7 pièces produites par l'entreprise et on admet que le choix des 7 pièces suit une loi binomiale
   a) calculer la probabilité que l'échantillon ne comporte que des pièces sans défaut
   b) calculer la probabilité que l'échantillon comporte exactement 6 pièces sans défaut
   c) en déduire la probabilité d'avoir au moins 2 pièces défectueuses dans l'échantillon
      (les résultats de 2) seront donnés à 10^{-3} près)

Exercice 3C.15 :

Pour réduire la pollution, le gouvernement d'un pays décide d'interdire, pendant une journée, la circulation en ville aux véhicules non prioritaires portant un numéro pair.

On sait que:

- 4% des véhicules sont prioritaires
- 1 tiers des véhicules non prioritaires portent un numéro pair.

1) On contrôle un véhicule au hasard.
   a) donner la probabilité de l'évènement A: "le véhicule est un véhicule prioritaire"
   b) calculer la probabilité de l'évènement B: " le véhicule n'a pas le droit de circuler ce jour là"
2) Dix contrôles sont effectués au hasard de manière indépendante, un conducteur pouvant être contrôlé plusieurs fois.
   On note x la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre d'infractions constatées parmi les 10 contrôles effectués.
   a) La variable aléatoire x suit une loi binomiale: $B(n;p)$. Indiquez les valeurs de n et de p.
   b) Calculer, à l'aide de la calculatrice, les probabilités des évènements:
      a:" aucun véhicule n'est en infraction"
      b:" quatre véhicules contrôlés exactement sont en infraction"
      c:" tous les véhicules sont en infraction"
   c) Utiliser les résultats précédents pour calculer la probabilité qu'au moins un véhicule contrôlé ne soit pas en infraction.
   d) En moyenne, combien de véhicules qui ne sont pas en infraction peut-on espérer avoir contrôlé?

Exercice 3C.16 :

Un lycéen a sur son lecteur de musique 250 titres dont 15 de son groupe préféré. Chaque matin, en montant dans l'autobus, il met en route son lecteur en mode « Random ».

On suppose que ce mode lit au hasard l'un des 250 titres et que la mise en route de ce mode génère chaque jour le choix d'un titre indépendant du titre lu les jours précédents.

Sur cinq jours, on s'intéresse au nombre de fois où le lycéen écoute un titre de son groupe préféré.

1) Prouver que la probabilité d'écouter un jour donné, un titre de son groupe préféré est 0,06.
2) Montrer que sur les cinq jours, le nombre de fois où le lycéen écoute un titre de son groupe préféré, suit une loi binomiale dont on précisera le succès et les paramètres.
3) a) Quelle est la probabilité que le lycéen écoute exactement une fois sur les cinq jours un titre de son groupe préféré ? On donnera le résultat arrondi à 10^{-3} près.
   b) Quelle est la probabilité que le lycéen entende au moins une fois sur les cinq jours un titre de son groupe préféré ? On donnera le résultat arrondi à 10^{-3} près.
4) On suppose maintenant que l'écoute se déroule sur n jours $\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$.
   Déterminer le nombre minimal de jours d'écoute nécessaires pour que la probabilité que le lycéen n'entende jamais un titre de son groupe préféré soit inférieure ou égale à 0,1.

Exercice 3C.17 :

Une société produit des composants électroniques. Une étude a permis de montrer que la probabilité pour qu'un composant à la sortie de l'usine soit défectueux est égale à 0, 01.

On prélève au hasard huit composants (les composants sont conditionnés par lots de huit afin d'être vendus). La quantité produite est suffisamment importante pour que l'on considère le prélèvement comme étant avec remise.

Soit X la variable aléatoire comptabilisant le nombre de boules jaunes obtenues.

1. Quelle est la loi suivie par X ?
2. Calculer la probabilité que l'on ait exactement un composant défectueux dans le lot.
3. Calculer la probabilité que l'on ait au plus un composant défectueux dans le lot.

Exercice 3C.18 :

Une compagnie d'assurance constate que 60% des maisons assurées n'ont pas subi de sinistre dans l'année en cours. Pour adapter les contrats, elle décide de prélever quinze dossiers au hasard parmi ses clients.
La compagnie est suffisamment importante pour que l'on puisse considérer ces prélèvements comme étant avec remise.

1. Justifier que cette expérience correspond à un schéma de Bernoulli.
2. Calculer la probabilité que dix maisons, ou plus, n'aient pas subi de sinistre.

Exercice 3C.19 :

25% des personnes sont formées aux gestes qui peuvent sauver d'un accident cardiovasculaire.
Sept personnes sont témoins d'un accident cardio-vasculaire.

1. Quelle est la probabilité que parmi les sept témoins, aucun ne soit formé aux gestes qui sauvent ?
2. Quelle est la probabilité que parmi les sept témoins, au moins un soit formé aux gestes qui sauvent ?

Exercice 3C.20 :

5% des composants électroniques produits par une usine ont des caractéristiques hors de la tolérance imposée, et sont donc considérés comme défectueux.
On prélève au hasard, et avec remise, dix composants à la sortie de l'usine.
On note X la variable aléatoire qui à tout prélèvement de dix composants associe le nombre de composants défectueux. On admet que X suit une loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=0,05$.

1. Quelles sont les valeurs que peut prendre la variable aléatoire X ?
2. Décrire en français l'événement X = 2.
3. Calculer la probabilité P (X = 2).
4. Dresser le tableau donnant la loi de probabilité de X.
5. Quel nombre de composants défectueux peut-on s'attendre à avoir, en moyenne, sur un prélèvement aléatoire de dix composants ?

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. Quet

Exercice 3C.1 :

On effectue 50 tirages successifs avec remise d'une boule dans une urne contenant trois boules rouges, deux vertes et six jaunes.

Soit X la variable aléatoire comptabilisant le nombre de boules jaunes obtenues.

1) Succession d'épreuves **identiques** (avec remise) et **indépendantes** à **deux issues possibles** (jaune ou non-jaune) : X suit une loi binomiale de paramètres $n=50$ et $p=\frac{6}{11}$

2) Probabilité d'obtenir 25 boules jaunes :
$$p(X=25)=\binom{50}{25}\left(\frac{6}{11}\right)^{25}\left(1-\frac{6}{11}\right)^{50-25}=\text{binomFDP}(50,6/11,25)\simeq 0,091$$

3) Probabilité d'obtenir au maximum 30 boules jaunes :
$$p(X\le 30)=\text{binomFRep}(50,6/11,30)\simeq 0,820$$

4) Probabilité d'obtenir plus de 15 boules jaunes ?
$$p(X>15)=1-p(X\le 15)=1-\text{binomFRep}(50,6/11,15)\simeq 0,997$$

5) Probabilité d'obtenir entre 13 et 30 boules jaunes :
$$\begin{aligned}p(13\le X\le 30)&=p(X\le 30)-p(X\le 12)\\&=\text{binomFRep}(50,6/11,30)-\text{binomFRep}(50,6/11,12)\\&=0,820\end{aligned}$$

6) Probabilité d'obtenir moins de 22 boules jaunes :
$$p(X<22)=p(X\le 21)=\text{binomFRep}(50,6/11,21)\simeq 0,051$$

Exercice 3C.2 :

X suit la loi binomiale $B(20;0,6)$.

a. $p(X=10)=\binom{20}{10}\times 0,6^{10}\times(1-0,6)^{20-10}=\mathit{BinomFDP}(20,0.6,10)\simeq 0,117$

b. $p(X\le 8)=\mathit{BinomFRep}(20{,}0.6{,}8)\simeq 0,057$

c. $p(X<12)=p(X\le 11)=\mathit{BinomFRep}(20{,}0.6{,}11)\simeq 0,404$

d. $p(X>13)=1-p(X\le 13)=1-\mathit{BinomFRep}(20{,}0.6{,}13)\simeq 0,25$

Exercice 3C.3 :

Il y a huit épreuves **identiques** et **indépendantes** avec alternative Succès (N : « obtenir une face noire ») – échec($\overline{\text{N}}$) ; on est donc en présence d'un schéma de Bernoulli.

Une variable aléatoire X qui compte le nombre de faces noires suit une loi binomiale de paramètres n = 8 et de probabilité :

$$p(N)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\text{ car il y a 2 faces noires sur 6 et }p(\overline{N})=1-p(N)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

1) $p(X=8)=(p(\text{N}))^8=\left(\frac{1}{3}\right)^8=\frac{1}{6561}$

2) L'événement contraire de « obtenir au moins une fois une face noire » est « obtenir 0 fois une face noire »,

soit : $p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \left(p\left(\overline{N}\right)\right)^8 = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^8 = 1 - \frac{256}{6561} = \frac{6305}{6561}$

Exercice 3C.4 :

On tire successivement avec remise 8 cartes d'un jeu de 32. Quelle est la probabilité d'obtenir 5 cœurs ?

Ces tirages sont identiques et indépendants et mènent à deux issues : cœur ou non.
Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de cœurs obtenu.

X suit une loi binomiale de paramètres : $n = 8$ et $p = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$

$$p(X = 5) = \binom{8}{5} \times \left(\frac{1}{4}\right)^5 \times \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{8-5} = BinomFDP(8,1/4,5) \simeq 0,023$$

Exercice 3C.5 :

On lance 6 fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. Quelle est la probabilité d'obtenir :

a) Au plus deux "Piles" ?
b) Au moins un "Pile" ?

Ces lancers sont identiques et indépendants et mènent à deux issues : « Pile » ou non.
Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de « Pile » obtenu.

X suit une loi binomiale de paramètres : $n = 6$ et $p = \frac{1}{2}$

$$p(X \leq 2) = BinomFRep(6{,}0.5{,}2) \simeq 0,344$$

$$p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - BinomFDP(6{,}0.5{,}0) \simeq 0,984$$

Exercice 3C.6 :

X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $B(n, p)$.

A l'aide votre calculatrice, donner le tableau de la loi de X dans les cas suivants :

a) $n = 6$ et $p = 0,4$

$$p(X = 0) = \binom{6}{0} \times 0,4^0 \times (1 - 0,4)^{6-0} = 1 \times 1 \times 0,6^6 = BinomFDP(6, 0.4, 0) \simeq 0,047$$

$$p(X = 1) = \binom{6}{1} \times 0,4^1 \times (1 - 0,4)^{6-1} = 6 \times 0,4 \times 0,6^5 = BinomFDP(6, 0.4, 1) \simeq 0,187$$

$$p(X = 2) = \binom{6}{2} \times 0,4^2 \times (1 - 0,4)^{6-2} = 15 \times 0,4^2 \times 0,6^4 = BinomFDP(6, 0.4, 2) \simeq 0,311$$

$$p(X = 3) = \binom{6}{3} \times 0,4^3 \times (1 - 0,4)^{6-3} = 20 \times 0,4^3 \times 0,6^3 = BinomFDP(6, 0.4, 3) \simeq 0,276$$

$$p(X = 4) = \binom{6}{4} \times 0,4^4 \times (1 - 0,4)^{6-4} = 15 \times 0,4^4 \times 0,6^2 = BinomFDP(6, 0.4, 4) \simeq 0,138$$

$$p(X = 5) = \binom{6}{5} \times 0,4^5 \times (1 - 0,4)^{6-5} = 6 \times 0,4^5 \times 0,6^1 = BinomFDP(6, 0.4, 5) \simeq 0,037$$

$$p(X = 6) = \binom{6}{6} \times 0,4^6 \times (1 - 0,4)^{6-6} = 1 \times 0,4^6 \times 1 = BinomFDP(6, 0.4, 6) \simeq 0,004$$

x_i	0	1	2	3	4	5	6
$p(X = x_i)$	0,047	0,187	0,311	0,276	0,138	0,037	0,004

b) $n=9$ et $p=0,6$

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$p(X=x_i)$	0,0003	0,004	0,021	0,074	0,167	0,251	0,251	0,161	0,060	0,010

Exercice 3C.7 :

X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $B(n,p)$.

A l'aide votre calculatrice, calculer les probabilités demandées dans les cas suivants :

a) $n=15$ et $p=0,8$.

$$p(X=8)=\binom{15}{8}\times 0,8^8\times(1-0,8)^{15-8}=3861\times 0,8^8\times 0,2^7=BinomFDP(15,0.8,8)\simeq 0,014$$

$$p(X=12)=\binom{15}{12}\times 0,8^{12}\times(1-0,8)^{15-12}=455\times 0,8^{12}\times 0,2^3=BinomFDP(15,0.8,12)\simeq 0,25.$$

b) $n=10$ et $E(X)=3 \rightarrow E(X)=np$ donc $p=\dfrac{E(X)}{n}=\dfrac{3}{10}=0,3$

$$p(X\le 3)=BinomFRep(10,0.3,3)\simeq 0,650$$

$$p(X\ge 7)=1-p(X\le 6)=1-BinomFRep(10,0.3,6)\simeq 0,011.$$

c) $p=0,2$ et $\sigma=2 \rightarrow \sigma=\sqrt{np(1-p)}=2$

$$np(1-p)=4$$

$$n\times 0,2(1-0,2)=4$$

$$n=\frac{4}{0,2(1-0,2)}=25$$

$$p(X\le 2)=BinomFRep(25,0.2,2)\simeq 0,098$$

$$p(X<2)=p(X\le 1)=BinomFRep(25,0.2,1)\simeq 0,027.$$

Exercice 3C.8 :

La probabilité qu'une photocopieuse tombe en panne durant un mois donné est $p=0,05$.

Les pannes sont indépendantes les unes des autres.

Calculer les probabilités à 10^{-3} *près que la photocopieuse :*

a) ne tombe pas en panne durant 1 an ;

b) tombe en panne plus d'une fois durant cette année.

Soit la variable aléatoire X qui compte le nombre de photocopieuse en panne chaque mois.

Les photocopieurs sont identiques et les pannes surviennent de manière indépendante.

Un photocopieur est soit en panne, soit ne l'est pas.

La variable X suit donc une loi binomiale de paramètres n = 12 (un an = 12 mois) et p = 0,05.

a) $p(X=0)=BinomFDP(12,0.05,0)\simeq 0,54$

b) $p(X>1)=1-p(X\le 1)=1-BinomFRép(12,0.05,1)\simeq 0,118$

Exercice 3C.9 :

Soit la variable aléatoire X qui compte le nombre de clients satisfaits parmi les trois choisis.

Par hypothèse donnée dans l'énoncé, le choix de chacun des 3 clients se fait de manière identique et indépendante.

La variable X suit donc une loi binomiale de paramètres n = 3 et p = 0,75.
La probabilité demandée est :

$$p(X=1)=\binom{3}{1}\times 0,75^1\times(1-0,75)^{3-1}=3\times 0,75\times 0,25^2=\frac{9}{64}\approx 0,14=BinomFDP(3,0.75,1)$$

Exercice 3C.10 :

La variable aléatoire X suit la loi binomiale $B(10;0,4)$.

A la calculatrice, déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de :

a. $p(X=0)=BinomFDP(10,0.4,0)\simeq 0,006$

b. $p(X\leq 5)=BinomFRép(10,0.4,5)\simeq 0,834$

On réalise un nombre indéfini n d'épreuves de cette expérience : la loi binomiale devient : $B(n;0,4)$.
A partir de combien d'épreuves sera-t-on certain que la probabilité d'avoir au moins un succès est inférieure à 0,5% c'est-à-dire pour quelle valeur de n aura-t-on : $p(X\geq 1)>0,995$?

$$p(X\geq 1)>0,995$$
$$1-p(X=0)>0,995$$
$$1-\binom{n}{0}p^0(1-p)^{n-0}>0,995$$
$$1-1\times 1\times 0,6^n>0,995$$
$$1-0,6^n-1>0,995-1$$
$$-0,6^n>-0,005$$
$$-0,6^n\times(-1)<-0,005\times(-1)$$
$$0,6^n<0,005$$

On teste avec la calculatrice :

$0,6^5\simeq 0,078$

$0,6^{10}\simeq 0,006$

$0,6^{11}\simeq 0,004$ →c'est à partir de la 11ème expérience que le critère est atteint.

Exercice 3C.11 :

Lorsqu'une personne sort de la gare, la probabilité que ce soit une femme est $\frac{51,6}{100}=0,516$

1°) On assimile le passage de 4 personnes à un schéma de Bernoulli.
Le nombre N de femmes parmi ces 4 personnes est donc soumis à la loi binomiale $B(4;0,516)$
La probabilité que les 4 premières personnes qui sortent soient toutes des hommes est :

$$p(N=0)=\binom{4}{0}\times 0,516^0\times(1-0,516)^4=1\times 1\times 0,484^4\simeq 0,0549$$

2°) On assimile le passage de 10 personnes à un schéma de Bernoulli.
Le nombre N de femmes parmi ces 10 personnes est donc soumis à la loi binomiale $B(10;0,516)$
La probabilité que, sur les dix premières personnes qui sortent, il y ait exactement cinq femmes est :

$$p(N=5)=\binom{10}{5}\times 0,516^5\times(1-0,516)^5=252\times\times 0,516^5\times 0,484^5\simeq 0,2448$$

$$p(N=5)=BinomFDP(10,0.516,5)\simeq 0,2448$$

3°) a) On obtient la loi de probabilité du nombre N de femmes parmi les dix premières personnes qui sortent, c'est-à-dire la loi binomiale $B(10;0,516)$.

n_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p(X=n_i)$	0,0007	0,0075	0,0361	0,1026	0,1914	0,2448	0,2175	0,1325	0,0530	0,0126	0,013

On peut vérifier que la somme des probabilités est égale à 1.

b) $p(N\in[2;8]) = p(N=2)+p(N=3)+p(N=4)+p(N=5)+p(N=6)+p(N=7)+p(N=8)$

donc $p(N\in[2;8]) = 0{,}0361 + 0{,}1026 + 0{,}1914 + 0{,}2448 + 0{,}2175 + 0{,}1325 + 0{,}0530$

c'est-à-dire $p(N\in[2;8]) = 0{,}9779$.

On a donc $p(N\in[2;8]) \geq 95\ \%$.

Autre méthode :

$$p(N\in[2;8]) = p(N\leq 8) - p(N\leq 1) = BinomFRep(10{,}0.516{,}8) - BinomFRep(10{,}0.516{,}1)$$

Exercice 3C.12 :

Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre d'ordinateurs en panne.

$X\in\{0;1;2;...;49;50\}$

On considère l'épreuve de Bernoulli qui consiste à prendre un ordinateur au hasard parmi les 50 ordinateurs de l'entreprise et ayant les issues possibles :

S : « l'ordinateur est en panne » et E = $\overline{S}$: « l'ordinateur n'est pas en panne ».

On a p(S) = 0,01 et p(E) = 1 – 0,01 = 0,99.

Ces ordinateurs étant identiques et indépendants les uns des autres, X suit la loi binomiale $B(50;0,01)$ de paramètres n = 50 et p = 0,01 .

1. Probabilité qu'aucun ordinateur ne tombe en panne :

$$p(X=0)=\binom{50}{0}\times 0{,}01^0\times 0{,}99^{50} = 0{,}99^{50} \simeq 0{,}605$$

2. Probabilité que 5 ordinateurs soient en panne :

$$p(X=5)=\binom{50}{5}\times 0{,}01^5\times 0{,}99^{45} = BinomFDP(50{,}0.01{,}5) \simeq 0{,}000\,135$$

3. L'événement E : « au moins un ordinateur est en panne » est le contraire de l'événement F : « Aucun ordinateur n'est en panne » c'est à dire tous fonctionnent :

$$p(\mathrm{E}) = p(\overline{\mathrm{F}}) = 1 - p(\mathrm{F}) = 1 - 0{,}99^{50} \simeq 0{,}395$$

4. On note X la variable aléatoire donnant le nombre d'ordinateurs en panne parmi les 50 disponibles.

a) $p(X=3)$ est la probabilité que 3 ordinateurs sur les 50 soient en panne.

b) $p(X=3)=\binom{50}{3}\times 0{,}01^3\times 0{,}99^{47} = BinomFDP(50{,}0.01{,}3) \simeq 0{,}0122$

La probabilité que 3 ordinateurs au maximum soient en panne est de 0,7 environ, ou bien encore la probabilité qu'au moins 47 ordinateurs fonctionnent est de 0,7 environ.

c) $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = np = 50\times 0{,}01 = 0{,}5$

En moyenne, il y aura 0,5 ordinateur en panne dans l'entreprise.

Exercice 3C.13 :

Une épreuve consiste à lancer deux dés cubiques parfaits, l'un bleu et l'autre rouge, dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

On note S l'événement "la somme des numéros des deux dés est supérieure ou égale à 10".

On répète dix fois de suite cette épreuve dans les mêmes conditions.

1) Quelle est la probabilité de S lors d'une épreuve ?
2) Quelle est la probabilité d'obtenir trois fois la réalisation de S lors des dix épreuves ?
On donnera la valeur arrondie à 10^{-3} près.

3) On répète cette épreuve n fois de suite.

a) Prouver que la probabilité p, d'obtenir au moins une fois S est : $1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$

b) Quel est le nombre minimum d'épreuves pour que p soit supérieure à 0,9 ?

1)

	1	2	3	4	5	6
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
2	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
3	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
4	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
5	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
6	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**

Il y a 36 résultats possibles tous équiprobables, donc :

$$p(S)=\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre total de cas}}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

2) On répète 10 fois cette expérience de manière identique et indépendante, elle mène au succès ou à l'échec de S, donc S suit une loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=\frac{1}{6}$.

$$p(S=3)=BinomFDP(10,1/6,3)\simeq 0,155$$

3) On répète n fois cette épreuve.

a) $p=p(S\geq 1)=1-p(S=0)=1-\binom{n}{0}\times\left(\frac{1}{6}\right)^0\times\left(1-\frac{1}{6}\right)^n=1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$

b) $p>0,9 \Leftrightarrow 1-\left(\frac{5}{6}\right)^n>0,9 \Leftrightarrow -\left(\frac{5}{6}\right)^n>0,9-1 \Leftrightarrow -\left(\frac{5}{6}\right)^n>-0,1$

$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^n<0,1$

$\left(\frac{5}{6}\right)^{12}\simeq 0,112$ et $\left(\frac{5}{6}\right)^{13}\simeq 0,093$: il faudra au moins 13 lancers.

Exercice 3C.14 :

1) a) p(A) = $\mathbf{\frac{2}{3}}$ et p(B) = $\mathbf{\frac{1}{3}}$

b) p(S/A) = **0,9** et p(S/B) = **0,95**

or , S est la réunion des événements disjoints $S\cap A$ et $S\cap B$

d'où , d'après la formule des probabilités totales , on a :

p(S) = p($S\cap A$) + p($S\cap B$)

= p(S/A) $\times$ p(A) + p(S/B) $\times$ p(B)

= ($0,9\times\frac{2}{3}$) + ($0,95\times\frac{1}{3}$)

$= \frac{275}{300}$

$= \frac{11}{12}$

donc **la probabilité que la pièce soit sans défaut est $\frac{11}{12}$**

2°) il y a répétition de 7 épreuves identiques et indépendantes, avec une alternative succès (S) et échec ($\overline{S}$) : on est donc en présence d'un schéma de Bernoulli

soit p la probabilité du succès S : p = $\frac{11}{12}$

soit X la variable aléatoire comptant le nombre de succès : X suit la loi binomiale $B\left(7, \frac{11}{12}\right)$

a) $p(X=7) = \binom{7}{7} \times \left(\frac{11}{12}\right)^7 \times \left(\frac{1}{12}\right)^0 = \left(\frac{11}{12}\right)^7 \simeq 0,544$

donc **la probabilité que l'échantillon ne comporte que des pièces sans défaut est environ 0,544**

b) $p(X=6) = \binom{7}{6} \times \left(\frac{11}{12}\right)^6 \times \left(\frac{1}{12}\right)^1 = 7 \times \left(\frac{11}{12}\right)^6 \times \frac{1}{12} \simeq 0,346$

donc **la probabilité que l'échantillon comporte exactement 6 pièces sans défaut est environ 0,346**

c) l'événement D « obtenir au moins 2 pièces défectueuses » est le contraire de « obtenir 7 pièces sans défaut ou 6 pièces sans défaut » d'où :

p(D) = 1 – p(X = 7) – p(X = 6)

$= 1 - -\left(\frac{11}{12}\right)^7 - \left(\frac{11}{12}\right)^6 \times \frac{7}{12}$

$\approx 0,11$

donc **la probabilité d'obtenir au moins 2 pièces défectueuses est environ 0,11**

Exercice 3C.15 :

Pour réduire la pollution, le gouvernement d'un pays décide d'interdire, pendant une journée, la circulation en ville aux véhicules non prioritaires portant un numéro pair.

On sait que:

- *4% des véhicules sont prioritaires*
- *1 tiers des véhicules non prioritaires portent un numéro pair.*

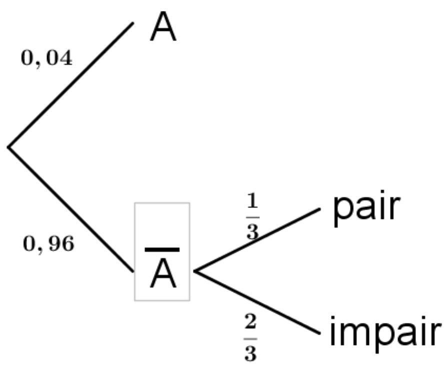
1) *On contrôle un véhicule au hasard.*

a) *donner la probabilité de l'évènement A: "le véhicule est un véhicule prioritaire"*

C'est une donnée de l'énoncé : $p(A) = 0,04$

b) *calculer la probabilité de l'évènement B: " le véhicule n'a pas le droit de circuler ce jour là"*

96% des véhicules sont non prioritaires : un arbre peut être utile :



Les véhicules non prioritaires et de numéro pair n'ont pas le droit de circuler ce jour-là :

$$p(B)=0,96\times\frac{1}{3}=0,32$$

2) *Dix contrôles sont effectués au hasard de manière indépendante, un conducteur pouvant être contrôlé plusieurs fois.*
On note x la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre d'infractions constatées parmi les 10 contrôles effectués.

a) *La variable aléatoire x suit une loi binomiale: $B(n;p)$. Indiquez les valeurs de n et de p.*

10 contrôles donc $n=10$ et la probabilité d'être en infraction est $p=p(B)=0,32$

b) *Calculer, à l'aide de la calculatrice, les probabilités des évènements:*
a:" aucun véhicule n'est en infraction"
b:" quatre véhicules contrôlés exactement sont en infraction"
c:" tous les véhicules sont en infraction"

$$p(a)=p(x=0)=binomFDP(10,0.32,0)\simeq 0,021$$

$$p(b)=p(x=4)=binomFDP(10,0.32,4)\simeq 0,218$$

$$p(c)=p(x=10)=binomFDP(10,0.32,10)\simeq 0,00001$$

c) *Utiliser les résultats précédents pour calculer la probabilité qu'au moins un véhicule contrôlé ne soit pas en infraction.*

$$p(x<10)=1-p(X=10)=1-0,00001=0,99999$$

d) *En moyenne, combien de véhicules qui ne sont pas en infraction peut-on espérer avoir contrôlé?*

$$E=np=10\times 0,32=3,2$$

Exercice 3C.16 :

Un lycéen a sur son lecteur de musique 250 titres dont 15 de son groupe préféré. Chaque matin, en montant dans l'autobus, il met en route son lecteur en mode « Random ».
On suppose que ce mode lit au hasard l'un des 250 titres et que la mise en route de ce mode génère chaque jour le choix d'un titre indépendant du titre lu les jours précédents.
Sur cinq jours, on s'intéresse au nombre de fois où le lycéen écoute un titre de son groupe préféré.

1) *Prouver que la probabilité d'écouter un jour donné, un titre de son groupe préféré est 0,06.*
Le choix d'un morceau de musique étant purement aléatoire, la probabilité d'écoute d'un morceau du groupe préféré est : $\frac{\text{nombre de morceaux du groupe préféré}}{\text{nombre total de morceaux}}=\frac{15}{250}=0,06$

2) *Montrer que sur les cinq jours, le nombre de fois où le lycéen écoute un titre de son groupe préféré, suit une loi binomiale dont on précisera le succès et les paramètres.*
Les morceaux de musique sont choisis au hasard de manière identique et indépendamment.
Le morceau de musique écouté est ou n'est pas un titre du groupe préféré.
Il s'agit d'une loi binomiale de paramètres $n=3$ et $p=0,06$.

3) *a) Quelle est la probabilité que le lycéen écoute exactement une fois sur les cinq jours un titre de son groupe préféré ? On donnera le résultat arrondi à 10^{-3} près.*
Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de morceaux de musique du groupe préféré sur ces cinq jours : X peut varier de 0 à 5 et suit la loi binomiale $B(5;0,06)$.

$$p(X=1)=binomFDP(5,0.06,1)\simeq 0,234$$

b) Quelle est la probabilité que le lycéen entende au moins une fois sur les cinq jours un titre de son groupe préféré ? On donnera le résultat arrondi à 10^{-3} près.

$$p(X\geq 1)=1-p(X=0)=1-binomFDP(5,0.06,0)\simeq 0,266$$

4) On suppose maintenant que l'écoute se déroule sur *n* jours $\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$.

Déterminer le nombre minimal de jours d'écoute nécessaires pour que la probabilité que le lycéen n'entende jamais un titre de son groupe préféré soit inférieure ou égale à 0,1.

$$p\left(X=0\right) \leq 0,1$$

$$\binom{n}{0} \times 0,06^0 \times \left(1-0,06\right)^n \leq 0,1$$

$$1 \times 1^0 \times 0,94^n \leq 0,1$$

$$0,94^n \leq 0,1$$

On teste à la calculatrice :

$0,94^{30} \simeq 0,156$ $\qquad 0,94^{35} \simeq 0,115$ $\qquad 0,94^{37} \simeq 0,101$ $\qquad 0,94^{38} \simeq 0,095$

→au bout de 36 jours

Exercice 3C.17 :

Une société produit des composants électroniques. Une étude a permis de montrer que la probabilité pour qu'un composant à la sortie de l'usine soit défectueux est égale à 0, 01.
On prélève au hasard huit composants (les composants sont conditionnés par lots de huit afin d'être vendus). La quantité produite est suffisamment importante pour que l'on considère le prélèvement comme étant avec remise.
Soit X la variable aléatoire comptabilisant le nombre de boules jaunes obtenues.

1. *Quelle est la loi suivie par X ?*
   Les composants sont identiques et indépendants, et sont soit corrects, soit défectueux.
   X suit une loi binomiale de paramètres $n=8$ et $p=0,01$.
2. *Calculer la probabilité que l'on ait exactement un composant défectueux dans le lot.*
   $$p\left(X=1\right)=binomFDP\left(8,0.01,1\right) \simeq 0,075$$
3. Calculer la probabilité que l'on ait au plus un composant défectueux dans le lot.
   $$p\left(X \leq 1\right)=binomFRép\left(8,0.01,1\right) \simeq 0,997$$

Exercice 3C.18 :

Une compagnie d'assurance constate que 60% des maisons assurées n'ont pas subi de sinistre dans l'année en cours. Pour adapter les contrats, elle décide de prélever quinze dossiers au hasard parmi ses clients.
La compagnie est suffisamment importante pour que l'on puisse considérer ces prélèvements comme étant avec remise.

1. *Justifier que cette expérience correspond à un schéma de Bernoulli.*
   Les dossiers sont identiques et sont choisis indépendamment, et correspondent soit à une maison sinistrée, soit à une maison indemne.
   Cette expérience correspond donc à un schéma de Bernoulli.
2. *Calculer la probabilité que dix maisons, ou plus, n'aient pas subi de sinistre.*
   Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de dossiers lié à des maisons non sinistrées :
   X suit une loi binomiale de paramètres $n=15$ et $p=0,6$.
   . $$p\left(X \geq 10\right)=1-p\left(X \leq 9\right)=1-binomFRép\left(15,0.6,9\right) \simeq 0,403$$

Exercice 3C.19 :

25% des personnes sont formées aux gestes qui peuvent sauver d'un accident cardiovasculaire.
Sept personnes sont témoins d'un accident cardio-vasculaire.

1. *Quelle est la probabilité que parmi les sept témoins, aucun ne soit formé aux gestes qui sauvent ?*
   Chaque personne a un rôle identique et indépendant, et est formée ou non aux gestes de secours.
   La variable aléatoire X qui compte le nombre de personnes formées aux gestes de secours, suit une loi binomiale de paramètres $n=0,25$ et $p=0,25$.

$p(X=0) = binomFDP(7, 0.25, 0) \simeq 0,133$

2. *Quelle est la probabilité que parmi les sept témoins, au moins un soit formé aux gestes qui sauvent ?*

$p(X \geq 1) = 1 - p(X=0) = 1 - 0,133 \simeq 0,867$

Exercice 3C.20 :

5% des composants électroniques produits par une usine ont des caractéristiques hors de la tolérance imposée, et sont donc considérés comme défectueux.
On prélève au hasard, et avec remise, dix composants à la sortie de l'usine.
On note X la variable aléatoire qui à tout prélèvement de dix composants associe le nombre de composants défectueux. On admet que X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,05$.

1. *Quelles sont les valeurs que peut prendre la variable aléatoire X ?*
   X peut varier de 0 à 10 composants défectueux.
2. *Décrire en français l'événement X = 2.*
   2 composants sur les 10 choisis sont défectueux.
3. *Calculer la probabilité P (X = 2).*
   $p(X=2) = binomFDP(10, 0.05, 2) \simeq 0,075$
4. *Dresser le tableau donnant la loi de probabilité de X.*

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p(X = x_i)$	0,599	0,315	0,075	0,010	0,001	0	0	0	0	0	0

5. *Quel nombre de composants défectueux peut-on s'attendre à avoir, en moyenne, sur un prélèvement aléatoire de dix composants ?*
   Espérance : $E = np = 10 \times 0,05 = 0,5$