Exercices sur les échantillonnages de la loi binomiale

Exercice 4F.1 :

D'après l'Insee, la proportion de femmes dans la population française est d'environ 51,6 %.
Un observateur se place à la sortie d'une gare et note le sexe des personnes qui passent.
On admettra que la proportion de femmes dans la population qui sort de la gare est identique à la proportion de femmes dans la population française.
On peut assimiler le passage des personnes à un schéma de Bernoulli.

1°) Déterminer la probabilité que les quatre premières personnes qui sortent soient toutes des hommes.

2°) Déterminer la probabilité que, sur les dix premières personnes qui sortent, il y ait exactement cinq femmes.

3°) a) Compléter, en utilisant une calculatrice ou un ordinateur, le tableau suivant correspondant à la loi de probabilité du nombre N de femmes parmi les dix premières personnes qui sortent. (On donnera les résultats à 10^{-4} près)

n_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p(X = n_i)$											

b) Justifier que $p(N \in [2;8]) \geq 95\%$.

Exercice 4F.2 : Rappel de 2nde

Un sondage est réalisé pour avoir une tendance du résultat d'une élection entre deux candidats A et B d'une région. Pour un total de 33 000 électeurs, le sondage portant sur 723 personnes interrogées donne 384 voix au candidat A.
Peut-on considérer que ce candidat sera élu au premier tour car il dépasse 50 % des intentions de vote ?

Exercice 4F.3 :

En utilisant une feuille de tableur, donner la loi binomiale B(50 ; 0,516).
Justifier que l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % est l'intervalle [0,38 ; 0,66].
Comparer avec l'intervalle $\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}};p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$

Exercice 4F.4 :

1°) Montrer que l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la loi binomiale $B(40;0,63)$ est l'intervalle $[0,45;0,775]$.

2°) Montrer que l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la loi binomiale $B(60;0,18)$ est l'intervalle $[0,067;0,283]$.

Exercice 4F.5 :

On lance 1000 fois une pièce. On obtient 484 « Pile », soit une fréquence de 0,484.
Au seuil de 95%, la pièce peut-elle être considérée comme équilibrée ?

Exercice 4F.6 :

Un constructeur affirme que la probabilité qu'un de ses téléviseurs ait une panne dans les 5 ans suivant son achat est égale à 0,12.

1°) Déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% de la fréquence de panne pour un échantillon de 100 téléviseurs.

2°) Une association de consommateurs effectue un test sur 100 personnes ayant ce modèle de téléviseur. Dans cet échantillon, 17 personnes ont eu une panne dans les 5 ans suivant leur achat. Que peut-on penser de l'affirmation du constructeur ?

3°) L'association pense maintenant effectuer un test sur 500 personnes. Déterminer, en utilisant un tableur ou un algorithme, l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% de la fréquence de panne pour un échantillon de 500 téléviseurs. Interpréter.

Exercice 4F.7 :

Une société fabrique des boîtes en plastique de deux couleurs : des vertes et des bleues.
La fabrication est automatisée et la machine est réglée à un niveau de 42 % de boîtes vertes et 58 % de boîtes bleues, correspondant à la demande du marché.
Un test est fait sur un échantillon de 180 boîtes prélevées au hasard.

1°) L'échantillon comporte autant de boîtes bleues que de boîtes vertes. La machine est-elle déréglée ?
2°) À partir de combien de boîtes bleues et de boîtes vertes obtenues sur un échantillon de 180 boîtes doit-on penser que la machine s'est déréglée ?

Exercice 4F.8 :

Une estimation donne 30 % des intentions de vote à une personne politique que l'on appellera A.
On interroge un échantillon de 50 personnes et on admet que les réponses successives correspondent à un schéma de Bernoulli. On note N le nombre de personnes interrogées qui déclarent vouloir voter pour A.

1°) Quels sont les paramètres de la loi binomiale associée à N.
2°) Calculer la probabilité que 4 personnes exactement sur les 50 déclarent vouloir voter pour A et en donner une valeur approchée.
3°) Calculer la probabilité que 45 personnes exactement sur les 50 déclarent vouloir voter pour A et en donner une valeur approchée.

Dans toute la suite on utilisera une feuille de tableur.

4°) Entrer dans la plage A1:A51 les nombres entiers de 0 à 50.
Dans la cellule B1 entrer la formule =LOI.BINOMIALE(A1; 50; 0,3; 0) donnant la probabilité de l'événement (N = 0). (0 correspond à la valeur contenue dans la cellule A1)
Recopier cette formule sur la plage B2:B51 pour obtenir p(N = k) pour tout entier k avec $k \in [0;50]$.
On vérifiera les valeurs obtenues dans les questions 2 et 3.
5°) Dans la cellule C1 entrer la formule =B1
Dans la cellule C2 entrer la formule =C1+B2
Recopier cette formule vers le bas jusqu'en C51.
À quoi correspondent les valeurs contenues dans la colonne C ?
6°) Déterminer le plus petit entier a tel que $p(N \leq a) > 2{,}5\%$.
7°) Déterminer le plus petit entier b tel que $p(N \leq b) > 97{,}5\%$.
8°) Justifier que $p(N \in [a;b]) = 95\%$.
9°) Donner l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% lorsqu'on interroge 50 personnes à propos de leur vote pour A. Comparer avec les valeurs précédentes.

Exercice 4F.9 :

Un laboratoire annonce qu'un médicament sauve 40% des patients atteints d'une maladie rare.
Pour contrôler cette affirmation, on le teste sur 100 patients atteints de cette maladie.
La fréquence des malades sauvés est de 30%.
Que penser de l'affirmation du laboratoire ?

Exercice 4F.1 :

Lorsqu'une personne sort de la gare, la probabilité que ce soit une femme est $\frac{51,6}{100}=0,516$

1°) On assimile le passage de 4 personnes à un schéma de Bernoulli.
Le nombre N de femmes parmi ces 4 personnes est donc soumis à la loi binomiale $B(4;0,516)$
La probabilité que les 4 premières personnes qui sortent soient toutes des hommes est :

$$p(N=0)=\binom{4}{0}\times 0,516^0\times(1-0,516)^4=1\times 1\times 0,484^4\simeq 0,0549$$

2°) On assimile le passage de 10 personnes à un schéma de Bernoulli.
Le nombre N de femmes parmi ces 10 personnes est donc soumis à la loi binomiale $B(10;0,516)$
La probabilité que, sur les dix premières personnes qui sortent, il y ait exactement cinq femmes est :

$$p(N=5)=\binom{10}{5}\times 0,516^5\times(1-0,516)^5=252\times\times 0,516^5\times 0,484^5\simeq 0,2448$$

$$p(N=5)=BinomFDP(10,0.516,5)\simeq 0,2448$$

3°) a) On obtient la loi de probabilité du nombre N de femmes parmi les dix premières personnes qui sortent, c'est-à-dire la loi binomiale $B(10;0,516)$.

n_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p(X=n_i)$	0,0007	0,0075	0,0361	0,1026	0,1914	0,2448	0,2175	0,1325	0,0530	0,0126	0,013

On peut vérifier que la somme des probabilités est égale à 1.

b) $p(N\in[2;8])=p(N=2)+p(N=3)+p(N=4)+p(N=5)+p(N=6)+p(N=7)+p(N=8)$

donc $p(N\in[2;8])=$ 0,0361 + 0,1026 + 0,1914 + 0,2448 + 0,2175 + 0,1325 + 0,0530

c'est-à-dire $p(N\in[2;8])=$ 0,9779.

On a donc $p(N\in[2;8])\geq 95\ \%$.

Autre méthode :

$$p(N\in[2;8])=p(N\leq 8)-p(N\leq 1)=BinomFRep(10{,}0.516{,}8)-BinomFRep(10{,}0.516{,}1)$$

Exercice 4F.2 : Rappel de 2nde

Un sondage est réalisé pour avoir une tendance du résultat d'une élection entre deux candidats A et B d'une région. Pour un total de 33 000 électeurs, le sondage portant sur 723 personnes interrogées donne 384 voix au candidat A.
Peut-on considérer que ce candidat sera élu au premier tour car il dépasse 50 % des intentions de vote ?
Taille de l'échantillon : n = 723 (très supérieure à 25).
Un sondage permet d'obtenir une fréquence :

→Fréquence du caractère: $\frac{384}{723}\simeq 0,5311$ arrondie à 0,531 à 10^{-3} près (valeur bien supérieure à 50 %).

Intervalle de fluctuation au seuil de 95 % :

$$\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}};p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]=\left[0,531-\frac{1}{\sqrt{723}};0,531+\frac{1}{\sqrt{723}}\right]=[0,494;0,568]$$

(valeurs arrondies à 10^{-3}).

Il n'est donc pas certain qu'il soit élu. On peut remarquer que les instituts de sondage donnent des pourcentages d'intention de vote, sans indiquer la « fourchette » dans laquelle se trouve cette valeur.

Exercice 4F.3 :

En utilisant une feuille de tableur, donner la loi binomiale $B(50;0,516)$.

Justifier que l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % est l'intervalle [0,38 ; 0,66].

Comparer avec l'intervalle $\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}};p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$

On observe que $p(X\leq 18)\simeq 0,019$ et $p(X\leq 19)\simeq 0,037$

donc le plus petit entier a tel que $p(X\leq a)>2,5\%$ est : a = 19

On observe que $p(X\leq 32)\simeq 0,972$ et $p(X\leq 33)\simeq 0,986$

donc le plus petit entier b tel que $p(X\leq b)>97,5\%$ est : b = 33

On en déduit que l'intervalle de fluctuation à 95 % est l'intervalle $\left[\frac{a}{n};\frac{b}{n}\right]=\left[\frac{19}{50};\frac{33}{50}\right]=[0,38;0,66]$

Or on a : p = 0,516 et n = 50, donc $p-\frac{1}{\sqrt{n}}\simeq 0,374$ et $p+\frac{1}{\sqrt{n}}\simeq 0,658$

Les intervalles $\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}};p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ et $\left[\frac{a}{n};\frac{b}{n}\right]$ sont quasiment identiques.

Exercice 4F.4 :

1°) Montrer que l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la loi binomiale $B(40;0,63)$ *est l'intervalle* $[0,45;0,775]$.

2°) Montrer que l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la loi binomiale $B(60;0,18)$ *est l'intervalle* $[0,067;0,283]$.

1) Pour trouver a et b, on réalise :

$\text{binomFRep}(40,0.63,18)\simeq 0,015$ et $\text{binomFRep}(40,0.63,19)\simeq 0,033$ donc $a=19$

$\text{binomFRep}(40,0.63,30)\simeq 0,962$ et $\text{binomFRep}(40,0.63,31)\simeq 0,983$ donc $b=31$

L'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % est : $\left[\frac{19}{40};\frac{31}{40}\right]=[0,475;0,775]$

2) Pour trouver a et b, on réalise :

$\text{binomFRep}(60,0.18,4)\simeq 0,011$ et $\text{binomFRep}(60,0.18,5)\simeq 0,029$ donc $a=5$

$\text{binomFRep}(60,0.18,16)\simeq 0,967$ et $\text{binomFRep}(60,0.18,17)\simeq 0,984$ donc $b=17$

L'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % est : $\left[\frac{5}{60};\frac{17}{60}\right]=[0,083;0,283]$

Exercice 4F.5 :

On lance 1000 fois une pièce. On obtient 484 « Pile », soit une fréquence de 0,484.

Au seuil de 95%, la pièce peut-elle être considérée comme équilibrée ?

Soit X la variable aléatoire associée à la sortie de « Pile ». Les 1000 épreuves sont **indépendantes** et **identiques**, avec **deux issues**. La variable X suit une loi binomiale $B(n,p)=B(1000;0,484)$.

Au seuil de 95 % l'intervalle de fluctuation donné par la loi binomiale est : $I=\left[\frac{a}{n};\frac{b}{n}\right]$

Pour trouver *a* et *b*, on utilise une calculatrice afin de retirer 2,5% des valeurs extrêmes de part et d'autre :

$p(\text{X}\leq 452)=0,023$ et $p(\text{X}\leq 453)=0,027$

$p(\text{X} \leq 515) = 0{,}977$ et $p(\text{X} \leq 514) = 0{,}973$

d'où a = 453 et b = 515.

Ainsi : $I = \left[\frac{a}{n};\frac{b}{n}\right] = \left[\frac{453}{1000};\frac{515}{1000}\right] = [0{,}453;0{,}515]$

La fréquence obtenue est comprise dans l'intervalle de fluctuation : la pièce a de grandes chances d'être équilibrée.

Exercice 4F.6 :

Un constructeur affirme que la probabilité qu'un de ses téléviseurs ait une panne dans les 5 ans suivant son achat est égale à 0,12.

1°) *Déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% de la fréquence de panne pour un échantillon de 100 téléviseurs.*

2°) *Une association de consommateurs effectue un test sur 100 personnes ayant ce modèle de téléviseur. Dans cet échantillon, 17 personnes ont eu une panne dans les 5 ans suivant leur achat. Que peut-on penser de l'affirmation du constructeur ?*

3°) *L'association pense maintenant effectuer un test sur 500 personnes. Déterminer, en utilisant un tableur ou un algorithme, l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% de la fréquence de panne pour un échantillon de 500 téléviseurs. Interpréter.*

1°) Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de téléviseurs en panne.
Les téléviseurs sont tous identiques et indépendants et sont soit en panne, soit ne le sont pas.
X suit donc une loi binomiale $B(100;0{,}12)$.

Au seuil de 95 % l'intervalle de fluctuation donné par la loi binomiale est : $I = \left[\frac{a}{n};\frac{b}{n}\right]$

Pour trouver a et b, on utilise une calculatrice pour retirer 2,5% des valeurs extrêmes :

$p(\text{X} \leq 5) = \text{binomFRep}(100, 0.12, 5) \simeq 0{,}015$ et $p(\text{X} \leq 6) = \text{binomFRep}(100, 0.12, 6) \simeq 0{,}037$

$p(\text{X} \leq 18) = \text{binomFRep}(100, 0.12, 18) \simeq 0{,}972$ et $p(\text{X} \leq 19) = \text{binomFRep}(100, 0.12, 19) \simeq 0{,}985$

d'où a = 6 et b = 19.

Ainsi pour un échantillon de 100 téléviseurs : $I = \left[\frac{a}{n};\frac{b}{n}\right] = \left[\frac{6}{100};\frac{19}{100}\right] = [0{,}06;0{,}19]$

2°) Sur 100 personnes interrogées par l'association, 17 personnes ont eu une panne, ce qui correspond à une fréquence de $\frac{17}{100} = 0{,}17$.

La fréquence est dans l'intervalle [0,06 ; 0,19].

Le résultat du test de l'association est compatible avec l'affirmation du constructeur.

3°) En utilisant la loi binomiale $B(500;0{,}12)$.

On observe que $p(X \leq 45) \simeq 0{,}02$ et $p(X \leq 46) \simeq 0{,}028$

donc le plus petit entier a tel que $p(X \leq a) > 2{,}5\%$ est : a = 46

On observe que $p(X \leq 74) \simeq 0{,}974$ et $p(X \leq 75) \simeq 0{,}981$

donc le plus petit entier b tel que $p(X \leq b) > 97{,}5\%$ est : b = 75

Donc, pour un échantillon de 500 téléviseurs, l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % est l'intervalle $\left[\frac{a}{n};\frac{b}{n}\right] = \left[\frac{46}{500};\frac{75}{500}\right] = [0{,}092;0{,}15]$

Exercice 4F.7 :

Une société fabrique des boîtes en plastique de deux couleurs : des vertes et des bleues.
La fabrication est automatisée et la machine est réglée à un niveau de 42 % de boîtes vertes et 58 % de boîtes bleues, correspondant à la demande du marché.
Un test est fait sur un échantillon de 180 boîtes prélevées au hasard.

1°) L'échantillon comporte autant de boîtes bleues que de boîtes vertes. La machine est-elle déréglée ?
2°) À partir de combien de boîtes bleues et de boîtes vertes obtenues sur un échantillon de 180 boîtes doit-on penser que la machine s'est déréglée ?

La proportion de boîtes vertes doit être de 42 % et on fait un test sur 180 boîtes.
Les tirages sont identiques et indépendants donc la loi associée au nombre V de boîtes vertes est la loi binomiale de paramètres (180 ; 0,42).
On peut également utiliser le tableur EXCEL pour la loi binomiale $B(180;0,42)$:

C1 | fx Σ = | =LOI.BINOMIALE(A1;180;0,42;1)

	A	B	C	D
1	0	2,61239498471056E-043	2,61239498471056E-043	
2	1	3,40512173869169E-041	3,4312456885388E-041	
3	2	2,20687114064518E-039	2,24118359753057E-039	
4	3	9,48193600428931E-038	9,70605436404236E-038	
5	4	3,03830656275374E-036	3,13536710639416E-036	
6	5	7,74453865926745E-035	8,05807536990687E-035	
7	6	1,63569997544873E-033	1,7162807291478E-033	
8	7	2,94425995580771E-032	3,11588802872249E-032	
9	8	4,61055880148682E-031	4,92214760435907E-031	
10	9	6,38058942182773E-030	6,87280418226364E-030	
11	10	7,90092986682186E-029	8,58821028504822E-029	

63	62	0,0072505117	0,0231208989	
64	63	0,0098340273	0,0329549262	
65	64	0,0130184295	0,0459733557	

On observe que $p(X \leq 62) \simeq 0,023$ et $p(X \leq 63) \simeq 0,033$

donc le plus petit entier a tel que $p(X \leq a) > 2,5\%$ est : a = 63

89	88	0,0105006481	0,9737813825	
90	89	0,0078602294	0,9816416119	
91	90	0,0057551335	0,9873967454	

On observe que $p(X \leq 88) \simeq 0,974$ et $p(X \leq 89) \simeq 0,982$

donc le plus petit entier b tel que $p(X \leq b) > 97,5\%$ est : b = 89

Ces deux valeurs correspondent à l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 %.
L'échantillon comporte autant de boîtes bleues que de boîtes vertes, c'est-à-dire 90 de chaque.
90 n'étant pas compris entre 63 et 89, on peut penser que la machine est déréglée (au risque de 5%).

2°) D'après les valeurs de a et b données dans la question précédente, on peut penser que la machine est déréglée si le nombre de boîtes vertes est inférieur à 63 ou supérieur à 89, c'est-à-dire si le nombre de boîtes bleues est inférieur à 91 (= 180 - 89) ou supérieur à 117 (=180 - 63).
NB : on aurait trouvé les mêmes résultats en raisonnant sur le nombre de boîtes bleues avec la loi binomiale B(180 ; 0,58).

Exercice 4F.8 :

Une estimation donne 30 % des intentions de vote à une personne politique que l'on appellera A.
On interroge un échantillon de 50 personnes et on admet que les réponses successives correspondent à un schéma de Bernoulli. On note N le nombre de personnes interrogées qui déclarent vouloir voter pour A.

1°) *Quels sont les paramètres de la loi binomiale associée à N.*

N suit la loi binomiale $B(50;0,3)$.

2°) *Calculer la probabilité que 4 personnes exactement sur les 50 déclarent vouloir voter pour A et en donner une valeur approchée.*

$$p(N=4)=\binom{50}{4}\times 0,3^4\times 0,7^{46}\simeq 1,4\times 10^{-4}$$

3°) *Calculer la probabilité que 45 personnes exactement sur les 50 déclarent vouloir voter pour A et en donner une valeur approchée.*

$$p(N=45)=\binom{50}{45}\times 0,3^{45}\times 0,7^{5}\simeq 1,05\times 10^{-18}$$

Dans toute la suite on utilisera une feuille de tableur.

4°) *Entrer dans la plage A1:A51 les nombres entiers de 0 à 50.*
Dans la cellule B1 entrer la formule =LOI.BINOMIALE(A1; 50; 0,3; 0) donnant la probabilité de l'événement (N = 0). (0 correspond à la valeur contenue dans la cellule A1)
Recopier cette formule sur la plage B2:B51 pour obtenir p(N = k) pour tout entier k avec $k\in[0;50]$.
On vérifiera les valeurs obtenues dans les questions 2 et 3.

A	B
0	1,79847E-08
1	3,85385E-07
2	4,04655E-06
3	2,77477E-05
4	0,00013973

45	1,05203E-18
46	4,90076E-20
47	1,78751E-21
48	4,78798E-23
49	8,37548E-25
50	7,17898E-27

5°) *Dans la cellule C1 entrer la formule =B1*
Dans la cellule C2 entrer la formule =C1+B2
Recopier cette formule vers le bas jusqu'en C51.
À quoi correspondent les valeurs contenues dans la colonne C ?

On obtient les sommes cumulées, c'est-à-dire tous les binomFRép.

6°) *Déterminer le plus petit entier a tel que* $p(N\le a)>2,5\%$.

8	0,010989144	0,01825335
9	0,021978287	0,04023163

On obtient : a = 9

7°) Déterminer le plus petit entier b tel que $p(N\le b)>97,5\%$.

21	0,022676794	0,97491296
22	0,012810916	0,98772387

On obtient : b = 22

8°) *Justifier que* $p(N\in[a;b])=95\%$.

$$p(N\in[a;b])=p(a\le N\le b)=p(N\le b)-p(N<a)$$

Or : $p(N\le b)\ge 0,975$ et $p(N<a)<0,025$

Donc $p(N\in[a;b])\ge 95\%$

9°) *Donner l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% lorsqu'on interroge 50 personnes à propos de leur vote pour A. Comparer avec les valeurs précédentes.*

On obtient l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% :

$$\left[\frac{9}{50};\frac{22}{50}\right]=[0,18;0,44]$$

Exercice 4F.9 :

Un laboratoire annonce qu'un médicament sauve 40% des patients atteints d'une maladie rare.
Pour contrôler cette affirmation, on le teste sur 100 patients atteints de cette maladie.
La fréquence des malades sauvés est de 30%.
Que penser de l'affirmation du laboratoire ?

Soit X le nombre de malades sauvés par ce médicament dans un échantillon aléatoire de malades.

L'expérience consiste à choisir 100 patients au hasard, les tirages sont indépendants, il n'y a que deux issues possibles pour chaque patient.

Donc *X* suit une loi binomiale de paramètres : *n* = 100 et *p* = 0,4.

A l'aide la calculatrice :

$$\text{BinomFRép}(100, 0.4, 30) \simeq 0,0247 \qquad \text{BinomFRép}(100, 0.4, 31) \simeq 0,040$$

$$\text{BinomFRép}(100, 0.4, 49) \simeq 0,973 \qquad \text{BinomFRép}(100, 0.4, 50) \simeq 0,983$$

L'intervalle de fluctuation à 95%, de la fréquence des patients sauvés, dans les échantillons de taille 100 est

$$\left[\frac{31}{100}; \frac{50}{100}\right] = [0,31; 0,5]$$

La fréquence observée, qui est 0,30, n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation, donc, au seuil de risque 5%, on rejette l'hypothèse selon laquelle ce médicament sauve 40% des malades.