Exercices à prise d'initiative sur la binomiale

Exercice 1 :

Lorsqu'il sort de chez lui, chaque matin, Sherlock prend sa loupe, ou pas. S'il est préoccupé par son enquête en cours, il prend toujours sa loupe. S'il n'est pas particulièrement préoccupé, il prend sa loupe deux fois sur cinq.
Sherlock est un enquêteur acharné : il est préoccupé par l'enquête en cours un matin sur trois.
Sur dix matins choisis au hasard et indépendamment, combien de fois Sherlock prend-il en moyenne sa loupe en sortant de chez lui ?

Exercice 2 :

1. Un tireur vise une cible avec une chance sur deux de la toucher. Combien doit-il tirer de coups afin que la cible soit atteinte avec une probabilité supérieure ou égale à 0,95 ?
2. Même question lorsque le tireur a une chance sur trois de toucher la cible.

Exercice 3 :

Une fabrication automatique de pièces embouties donne un pourcentage de rebuts s'élevant à 5%.
On considère un échantillon de 10 pièces issues de cette fabrication.
Calculer la probabilité de trouver dans cet échantillon au plus 2 rebuts.

Exercice 4 :

Combien de fois faut-il lancer un dé équilibré pour faire au moins un six avec une probabilité supérieure ou égale à 0,99 ?

Exercice 5 :

On lance 2 dés équilibrés puis on totalise les points marqués. Au bout de 20 lancers quelle est la probabilité d'avoir obtenu 10 fois un total supérieur ou égal à 8 ?

Exercice 6 :

4 vacanciers Ahmed, Boris, Coralie et Damien tirent à la courte paille pour savoir qui fera la vaisselle. L'un d'eux Damien présente aux 3 autres 4 allumettes dont une brûlée. Ils tirent à tour de rôle et celui qui tire l'allumette brûlée fera la vaisselle et bien sûr Damien prend l'allumette laissée par les autres.
Coralie proteste : " Je tire toujours la troisième depuis des semaines après Ahmed et Boris, et ça tombe sur moi ! Désormais je veux tirer la première"
Qu'en pensez-vous ?

Exercice 7 : ***

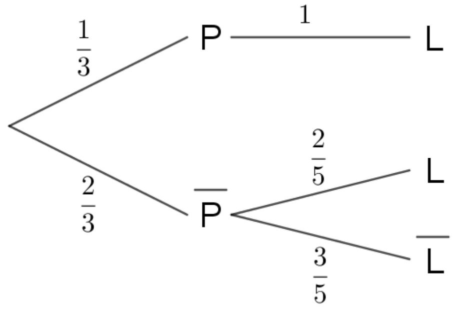
On estime que le gérant d'un portefeuille boursier bien informé a, pour une action donnée achetée, une probabilité égale à 0,8 de voir l'action monter. On estime aussi qu'un gérant mal informé a une probabilité égale à 0,5 de voir l'action baisser. On estime aussi que 30 % des gérants de portefeuilles boursiers sont bien informés, les autres ne l'étant pas. Un gérant donné achète 5 actions indépendantes les unes des autres. 3 montent et 2 baissent.
Est-il bien informé ou non?

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. Quet

Exercice 1 :

Lorsqu'il sort de chez lui, chaque matin, Sherlock prend sa loupe, ou pas. S'il est préoccupé par son enquête en cours, il prend toujours sa loupe. S'il n'est pas particulièrement préoccupé, il prend sa loupe deux fois sur cinq.
Sherlock est un enquêteur acharné : il est préoccupé par l'enquête en cours un matin sur trois.
Sur dix matins choisis au hasard et indépendamment, combien de fois Sherlock prend-il en moyenne sa loupe en sortant de chez lui ?

Soit P l'évènement « Sherlock est préoccupé »
Et L l'évènement « Sherlock prend sa loupe ».
On obtient l'arbre ci-contre.



Les évènements P et $\overline{\text{P}}$ forment une partition, d'après la loi des probabilités totales :

$$p(\text{L}) = p(\text{P} \cap \text{L}) + p\left(\overline{\text{P}} \cap \text{L}\right)$$
$$= p(\text{P}) \times p_{\text{P}}(\text{L}) + p(\text{P}) \times p_{\overline{\text{P}}}\left(\overline{\text{P}}\right)$$
$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{4}{15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

Les dix matins constituent une succession d'évènements identiques et indépendants menant à deux issues selon la présence de la loupe. La variable X comptant le nombre de fois où Sherlock prend sa loupe suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{3}{5}$.

La moyenne recherchée est donnée par l'espérance de la loi binomiale :

$$E = 10 \times \frac{3}{5} = 6.$$

En moyenne, Sherlock prend sa loupe à six reprises.

Exercice 2 :

1. Un tireur vise une cible avec une chance sur deux de la toucher. Combien doit-il tirer de coups afin que la cible soit atteinte avec une probabilité supérieure ou égale à 0,95 ?
   La variable X comptant le nombre de coups atteignant la cible sur *n* lancers suit une loi binomiale de paramètres *n* et $p = \frac{1}{2}$.

$$p(\text{X} \geq 1) \geq 0,95$$
$$\Leftrightarrow \quad 1 - p(\text{X} = 0) \geq 0,95$$
$$\Leftrightarrow \quad 1 - \binom{n}{0} \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \geq 0,95$$
$$\Leftrightarrow \quad 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \geq 0,95$$
$$\Leftrightarrow \quad -\left(\frac{1}{2}\right)^n \geq 0,95 - 1$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 0,05$$
$$\Leftrightarrow \quad \ln\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] \leq \ln 0,05$$

$$\Leftrightarrow \quad n\ln\left(\frac{1}{2}\right) \leq \ln 0,05$$

$$\Leftrightarrow \quad n \geq \frac{\ln 0,05}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \quad n \geq 4,32$$

Le tireur doit tirer au moins cinq coups.

2. *Même question lorsque le tireur a une chance sur trois de toucher la cible.*
Une démarche similaire mène à :

$$n \geq \frac{\ln 0,05}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} \quad \Leftrightarrow \quad n \geq 7,38$$

Le tireur doit tirer au moins huit coups.

Exercice 3 :

Une fabrication automatique de pièces embouties donne un pourcentage de rebuts s'élevant à 5%.
On considère un échantillon de 10 pièces issues de cette fabrication.
Calculer la probabilité de trouver dans cet échantillon au plus 2 rebuts.

Chaque pièce est fabriquée de manière identique et indépendante, avec deux issues selon son bon état.
La v.a. X comptabilisant le nombre de pièces défectueuses suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,05$.

$$p(\mathrm{X} \leq 2) = \mathrm{binomFRep}(10, 0.05, 2) \simeq 0,9885$$

La probabilité de trouver dans cet échantillon au plus 2 rebuts est environ égale à 0,9885, soit 98,85%.

Exercice 4 :

Combien de fois faut-il lancer un dé équilibré pour faire au moins un six avec une probabilité supérieure ou égale à 0,99 ?

Le dé est lancé de manière identique et indépendante, avec deux issues selon l'obtention d'un six.

La v.a. X comptabilisant le nombre de six obtenus suit une loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{1}{6}$.

$$p(\mathrm{X} \geq 1) \geq 0,99$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - p(\mathrm{X} = 0) \geq 0,99$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - \binom{n}{0} \times \left(\frac{1}{6}\right)^0 \times \left(\frac{5}{6}\right)^n \geq 0,99$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \geq 0,99$$

$$\Leftrightarrow \quad -\left(\frac{5}{6}\right)^n \geq 0,99 - 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 0,01$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln\left[\left(\frac{5}{6}\right)^n\right] \leq \ln 0,01$$

$$\Leftrightarrow \quad n \times \ln\left(\frac{5}{6}\right) \leq \ln 0,01$$

$$\Leftrightarrow \quad n \geq \frac{\ln 0,01}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \quad n \geq 25,2$$

Le joueur doit lancer le dé au moins 26 fois.

Exercice 5 :

On lance 2 dés équilibrés puis on totalise les points marqués. Au bout de 20 lancers quelle est la probabilité d'avoir obtenu 10 fois un total supérieur ou égal à 8 ?

Un tableau est indispensable pour déterminer les probabilités des situations :

1[er] dé / 2[ème] dé	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Toutes ces probabilités étant équiprobables, la probabilité d'obtenir un total supérieur ou égal à 8 est :

$$p = \frac{15}{36}.$$

Les deux dés sont lancés de manière identique et indépendante, avec deux issues selon que la somme atteint la valeur 8.

La v.a. X comptabilisant le nombre de résultats supérieurs ou égaux à 8 suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = \frac{15}{36}$.

$$p(\mathrm{X} \geq 10) = 1 - p(\mathrm{X} \leq 9) = 1 - \mathrm{binomFRep}(20{,}15/36{,}9) \simeq 0,2957$$

La probabilité d'obtenir au moins 10 résultats supérieurs ou égaux à 8 est égale à 0,2957, soit environ 30%.

Exercice 7 :

On estime que le gérant d'un portefeuille boursier bien informé a, pour une action donnée achetée, une probabilité égale à 0,8 de voir l'action monter. On estime aussi qu'un gérant mal informé a une probabilité égale à 0,5 de voir l'action baisser. On estime aussi que 30 % des gérants de portefeuilles boursiers sont bien informés, les autres ne l'étant pas. Un gérant donné achète 5 actions indépendantes les unes des autres. 3 montent et 2 baissent.

Est-il bien informé ou non?

On appelle I l'événement "le gérant est bien informé" et M l'événement "3 actions sur 5 ont monté".

Quand on choisit 5 actions de manière aléatoire, identique et indépendante chaque action possède deux issues : "son cours monte" avec une probabilité p ou "son cours baisse".

La variable aléatoire X comptant le nombre d'actions dont le cours a monté suit donc la loi binomiale $B(5, p)$

Ainsi :

Dans le cas où le gérant est bien informé :

$$p = 0,8$$

et $$p_{\mathrm{I}}(\mathrm{M}) = p(\mathrm{X} = 3) = \binom{5}{3} \times 0,8^3 \times 0,2^2$$

Dans le cas où le gérant n'est pas bien informé :

$$p = 0,5$$

et $$p_{\bar{\mathrm{I}}}(\mathrm{M}) = p(\mathrm{X}=3) = \binom{5}{3} \times 0,5^3 \times 0,5^2 = \binom{5}{3} \times 0,5^5$$

D'après la loi des probabilités totales :

$$p(\mathrm{M}) = p(\mathrm{M} \cap \mathrm{I}) + p(\mathrm{M} \cap \bar{\mathrm{I}})$$

On cherche à calculer la probabilité que le gérant soit bien informé sachant que 3 actions sur 5 ont monté :

$$p_{\mathrm{M}}(\mathrm{I}) = \frac{p(\mathrm{M} \cap \mathrm{I})}{p(\mathrm{M})} = \frac{p(\mathrm{I}) \times p_{\mathrm{I}}(\mathrm{M})}{p(\mathrm{I}) \times p_{\mathrm{I}}(\mathrm{M}) + p(\bar{\mathrm{I}}) \times p_{\bar{\mathrm{I}}}(\mathrm{M})}$$

$$= \frac{0,3 \times \binom{5}{3} \times 0,8^3 \times 0,2^2}{0,3 \times \binom{5}{3} \times 0,8^3 \times 0,2^2 + 0,7 \times \binom{5}{3} \times 0,5^5} = \frac{0,006144}{0,006144 + 0,021875} \simeq 0,2193$$

Il est donc fort probable que le gérant ne soit pas bien informé.