Contrôle sur la loi binomiale

Exercice 1 Transport en commun (9 points)

Dans tout cet exercice, les probabilités seront arrondies, si nécessaire, à 10^{-4}.

D'après une étude, les utilisateurs réguliers de transports en commun représentent 17 % de la population française.
Parmi ces utilisateurs réguliers, 32 % sont des jeunes âgés de 18 à 24 ans.

Partie A :
On interroge une personne au hasard et on note :

- R l'évènement : « La personne interrogée utilise régulièrement les transports en commun ».
- J l'évènement : « La personne interrogée est âgée de 18 à 24 ans ».

1) Représentez la situation à l'aide d'un arbre pondéré, que l'on complétera au fur et à mesure de l'énoncé.
2) Calculer la probabilité $p(\mathrm{R} \cap \mathrm{J})$.
3) D'après cette même étude, les jeunes de 18 à 24 ans représentent 11 % de la population française. Montrer que la probabilité que la personne interrogée soit un jeune de 18 à 24 ans n'utilisant pas régulièrement les transports en commun est 0,0556 à 10^{-4} près.
4) En déduire la proportion de jeunes de 18 à 24 ans parmi les utilisateurs non réguliers des transports en commun.
5) On rencontre un jeune de 18 à 24 ans. Quelle est la probabilité qu'il utilise régulièrement les transports en commun ?

Partie B :
Lors d'un recensement sur la population française, un recenseur interroge au hasard 50 personnes en une journée sur leur pratique des transports en commun.
La population française est suffisamment importante pour assimiler ce recensement à un tirage avec remise.
Soit X la variable aléatoire dénombrant les personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 50 personnes interrogées.

1) Déterminer, en justifiant, la loi de X et préciser ses paramètres.
2) Calculer $p(X=5)$ et interpréter le résultat.
3) Le recenseur indique qu'il y a plus de 95 % de chance pour que, parmi les 50 personnes interrogées, moins de 13 d'entre elles utilisent régulièrement les transports en commun.
Cette affirmation est-elle vraie ? Justifier votre réponse.
4) Quel est le nombre moyen de personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 50 personnes interrogées ?

Exercice 2 Problème de seuil (4 points)

Dans une population, la proportion de personnes végétariennes est de 12 %.
On suppose cette population suffisamment grande pour pouvoir assimiler le tirage d'une personne dans cette population à un tirage avec remise.
Une cantine sert 250 repas à des personnes issues de cette population.
On appelle X la variable aléatoire associée au nombre de personnes végétariennes se présentant à la cantine.

1) Montrer que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres et l'espérance.
2) Le gestionnaire de cette cantine prévoit 33 repas végétariens.
Quelle est la probabilité que ce ne soit pas suffisant ?
3) Le gestionnaire de cette cantine prévoit k repas végétariens.
Déterminer k pour que les personnes végétariennes soient sûres à au moins 95 % qu'elles pourront manger un repas végétarien. On expliquera la méthode utilisée.

Exercice 3 **Loi binomiale** *(les questions sont indépendantes)* **(3 points)**

1) Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $B(n, p)$.

   On donne : $E(X)=43{,}2$ et $V(X)=27{,}648$. Déterminer $(1-p)$ puis p et n.

2) Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $B(50;0{,}3)$.

   L'intervalle $[9;21]$ est-il un intervalle de fluctuation centré au seuil de 95 % ?

Exercice 4 **Lancers de dé** **(4 points)**

On lance deux dés, bien équilibrés, de couleurs différentes dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
On appelle S l'événement « la somme des numéros des deux dés est égale à 6 ».

1) Montrer que la probabilité de l'événement S est égale à 0,1389 à 10^{-4} près.
2) On répète cette épreuve n fois de suite cette expérience.
   a) Déterminer, en fonction de n, la probabilité p_1 d'obtenir au moins une fois l'événement S.
   b) Quel est le nombre minimum d'épreuves pour que p_1 soit supérieure à 0,99 ?

Contrôle sur la loi binomiale - CORRIGE

Exercice 1 ***Transport en commun*** **(9 points)**

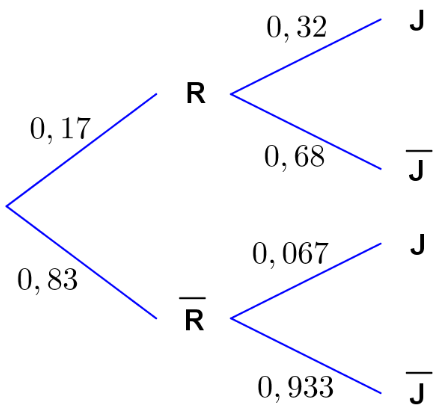
Dans tout cet exercice, les probabilités seront arrondies, si nécessaire, à 10^{-4}.
D'après une étude, les utilisateurs réguliers de transports en commun représentent 17 % de la population française. Parmi ces utilisateurs réguliers, 32 % sont des jeunes âgés de 18 à 24 ans.

Partie A :

On interroge une personne au hasard et on note :

- *R l'évènement : « La personne interrogée utilise régulièrement les transports en commun ».*
- *J l'évènement : « La personne interrogée est âgée de 18 à 24 ans ».*

1) *Représentez la situation à l'aide d'un arbre pondéré, que l'on complétera au fur et à mesure de l'énoncé.*



2) Calculer la probabilité $p(R \cap J)$.

$$p(R\cap J) = p(R)\times p_R(J) = 0{,}17\times 0{,}32 = 0{,}0544$$

3) *D'après cette même étude, les jeunes de 18 à 24 ans représentent 11 % de la population française.*
Montrer que la probabilité que la personne interrogée soit un jeune de 18 à 24 ans n'utilisant pas régulièrement les transports en commun est 0,0556 à 10^{-4} *près.*

D'après l'énoncé : $p(J) = 0{,}11$.

R et $\overline{R}$ forment une partition de l'univers. D'après la loi de probabilités totales :

$$p(J) = p(R\cap J) + p(\overline{R}\cap J)$$

Ainsi : $0{,}11 = 0{,}0544 + p(\overline{R}\cap J)$

$$\Leftrightarrow \quad p(\overline{R}\cap J) = 0{,}11 - 0{,}0544 = 0{,}0556$$

4) *En déduire la proportion de jeunes de 18 à 24 ans parmi les utilisateurs non réguliers des transports en commun.*

$$p(\overline{R}\cap J) = p(\overline{R})\times p_{\overline{R}}(J)$$

$$\Leftrightarrow \quad 0{,}0556 = 0{,}83\times p_{\overline{R}}(J)$$

$$\Leftrightarrow \quad p_{\overline{R}}(J) = \frac{0{,}0556}{0{,}83} \simeq 0{,}0670$$

La proportion de jeunes de 18 à 24 ans parmi les utilisateurs non réguliers des transports en commun est donc d'environ 6,7 %.

5) *On rencontre un jeune de 18 à 24 ans. Quelle est la probabilité qu'il utilise régulièrement les transports en commun ?*

$$p_J(R) = \frac{p(R\cap J)}{p(J)} = \frac{0{,}0544}{0{,}11} \simeq 0{,}4945$$

En moyenne, environ 49,45 % des jeunes de 18 à 24 ans utilisent régulièrement les transports en commun.

Partie B :

Lors d'un recensement sur la population française, un recenseur interroge au hasard 50 personnes en une journée sur leur pratique des transports en commun.
La population française est suffisamment importante pour assimiler ce recensement à un tirage avec remise.
Soit X la variable aléatoire dénombrant les personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 50 personnes interrogées.

1) *Déterminer, en justifiant, la loi de X et préciser ses paramètres.*
Soit l'expérience : on interroge une personne sur sa pratique des transports en commun et l'on appelle succès « la personne utilise régulièrement les transports en commun » avec la probabilité :
$$p = p(\mathrm{R}) = 0{,}17.$$
On réitère 50 fois cette expérience de façon identique et indépendante (assimilé à un tirage avec remise) et l'on appelle X la variable aléatoire comptabilisant le nombre de succès.
X suit la loi binomiale $B(50;0{,}17)$.

2) *Calculer $p(X=5)$ et interpréter le résultat.*
$$p(X=5)=\binom{50}{5}\times 0{,}17^5\times 0{,}83^{45}\simeq 0{,}0687$$
La probabilité qu'exactement cinq personnes choisies au hasard parmi les 50 prennent régulièrement les transports en commun est égale à environ 6,87 %.

3) *Le recenseur indique qu'il y a plus de 95 % de chance pour que, parmi les 50 personnes interrogées, moins de 13 d'entre elles utilisent régulièrement les transports en commun.*
Cette affirmation est-elle vraie ? Justifier votre réponse.
$$p(X<13)=p(X\le 12)=\text{binomFRep}(50;0{,}17;12)\simeq 0{,}9286$$
Il y a donc moins de 95 % de chance pour que, parmi les 50 personnes interrogées, moins de 13 d'entre elles utilisent régulièrement les transports en commun. Cette affirmation est fausse.

4) *Quel est le nombre moyen de personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 50 personnes interrogées ?*
$$E(X)=n\times p=50\times 0{,}17=8{,}5$$
Le nombre moyen de personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 50 personnes interrogées est de 8,5.

Exercice 2 **Problème de seuil** (4 points)

Dans une population, la proportion de personnes végétariennes est de 12 %.
On suppose cette population suffisamment grande pour pouvoir assimiler le tirage d'une personne dans cette population à un tirage avec remise.
Une cantine sert 250 repas à des personnes issues de cette population.
On appelle X la variable aléatoire associée au nombre de personnes végétariennes se présentant à la cantine.

1) *Montrer que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres et l'espérance.*
Une cantine sert de manière identique et indépendante à 250 personnes menant à deux issues selon que la personne est végétarienne ou pas. La variable aléatoire X comptant le nombre de végétariennes suit une loi binomiale de paramètres $n=250$ et $p=0{,}12$.

2) *Le gestionnaire de cette cantine prévoit 33 repas végétariens.*
Quelle est la probabilité que ce ne soit pas suffisant ?
$$p(X>33)=1-p(X\le 33)=1-\text{binomFRep}(250;0{,}12;33)\simeq 0{,}2437$$
Il y a 24,4 % de chance que ce ne soit pas suffisant.

3) *Le gestionnaire de cette cantine prévoit k repas végétariens.*
Déterminer k pour que les personnes végétariennes soient sûres à au moins 95 % qu'elles pourront manger un repas végétarien. On expliquera la méthode utilisée.
On cherche à déterminer la plus petite valeur k telle que : $p(X\le k)\ge 0{,}95$.
À l'aide de la calculatrice. On rentre la fonction :
$Y1$ = binomFRép(250, 0.12, X).
Puis on crée un tableau de valeurs, initialisé à 33 avec un pas de 1.
On obtient alors le tableau ci-contre :
On trouve donc $k=39$.
Le gestionnaire devra préparer 39 repas végétariens pour être sûr à 95 % que les personnes végétariennes pourront manger un repas végétarien.

X	Y1
33	0.7563
34	0.8111
35	0.8573
36	0.8948
37	0.9245
38	0.9471
39	0.9639
40	0.976
41	0.9844
42	0.9901
43	0.9939

Exercice 3 **Loi binomiale** **(3 points)**

1) *Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale* $B(n,p)$.

On donne : $E(X)=43,2$ *et* $V(X)=27,648$. *Déterminer* $(1-p)$ *puis* p *et* n.

$$E(X)=n\times p=43,2$$

Donc : $V(X)=n\times p\times(1-p)=43,2\times(1-p)$

Or : $V(X)=27,648$

Donc $43,2\times(1-p)=27,648 \Leftrightarrow (1-p)=\dfrac{27,648}{43,2}=0,64$

On en déduit :

$$1-p=0,64 \Leftrightarrow -p=0,64-1 \Leftrightarrow -p=-0,36 \Leftrightarrow p=0,36$$

La relation $E(X)=n\times p=43,2$ donne :

$$n=\frac{43,2}{p}=\frac{43,2}{0,36}=120$$

2) *Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale* $B(50;0,3)$.

L'intervalle $[9;21]$ *est-il un intervalle de fluctuation centré au seuil de 95 % ?*

Première méthode :

Avec la calculatrice, on saisit : $\text{Y1}=\text{binomFRep}(50;0,3;\text{X})$, on obtient :

$$p(X\le 8)\simeq 0,0183 \text{ et } p(X\le 9)\simeq 0,0402$$

puis : $p(X\le 21)\simeq 0,9749$ et $p(X\le 22)\simeq 0,9877$

Avec cette méthode, l'intervalle de fluctuation est $[9;22]$, mais $\dfrac{9+22}{2}=15,5$: il n'est pas centré.

Deuxième méthode :

$E(X)=50\times 0,3=15$: on vérifie que $\dfrac{9+21}{2}=15$: l'intervalle est centré

$$p(9\le X\le 21)=p(X\le 21)-p(X\le 8)$$
$$=\text{binomFRep}(50;0,3;21)-\text{binomFRep}(50;0,3;8)\simeq 0,9567$$

L'intervalle $[9;21]$ est donc bien un intervalle de fluctuation centré au seuil de 95 %.

Exercice 4 **Lancers de dé** **(4 points)**

On lance deux dés, bien équilibrés, de couleurs différentes dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
On appelle S l'événement « la somme des numéros des deux dés est égale à 6 ».

1) *Montrer que la probabilité de l'événement S est égale à 0,1389 à* 10^{-4} *près.*

Première méthode :

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	**6**	7
2	3	4	5	**6**	7	8
3	4	5	**6**	7	8	9
4	5	**6**	7	8	9	10
5	**6**	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$$p(S)=\frac{5}{36}\simeq 0,1389$$

Deuxième méthode :

Avec un arbre de probabilité de taille 6×6 :

→les 36 chemins sont équiprobables et seuls les chemins $(1,5)$, $(2,4)$, $(3,3)$, $(4,2)$ et $(5,1)$ réalisent une somme égale à 6 : $p(S)=\dfrac{5}{36}\simeq 0,1389$

2) *On répète cette épreuve n fois de suite cette expérience.*

a) *Déterminer, en fonction de n, la probabilité p_1 d'obtenir au moins une fois l'événement S.*

On répète n fois de suite un lancer et on appelle X la variable aléatoire associée au nombre de fois où l'on obtient une somme égale à six.

X suit la loi binomiale $B(n;0,1389)$.

$$p_1=p(X\geq 1)=1-p(X=0)=1-\binom{n}{0}\times 0,1389^0\times 0,8611^n=1-0,8611^n$$

b) *Quel est le nombre minimum d'épreuves pour que p_1 soit supérieure à 0,99 ?*

$$\begin{aligned} p_1>0,99 &\Leftrightarrow 1-0,8611^n>0,99\\ &\Leftrightarrow -0,8611^n>0,99-1\\ &\Leftrightarrow -0,8611^n>-0,01\\ &\Leftrightarrow 0,8611^n<0,01 \end{aligned}$$

Avec la calculatrice :

$$0,8611^{30}\simeq 0,9887 \quad \text{et} \quad 0,8611^{31}\simeq 0,9903$$

Avec le logarithme :

$$n>\frac{\ln 0,01}{\ln 0,8611} \Leftrightarrow n>30,79$$

Le nombre minimum d'épreuves est 31.