Contrôle sur la loi binomiale

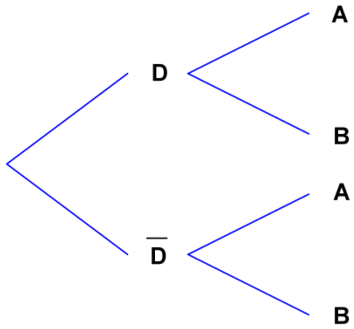
<u>**Exercice 1 :**</u> ***(6 points : 1,0 + 0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5 + 1 ; 1 point de rédaction)***

Deux entreprises A et B fabriquent des puces électroniques.
Pour une commande de 10 000 pièces, A en a produit 70% et B en a produit 30%.
L'atelier A produit 5% de puces défectueuses et B en produit 2%.
On prend une puce au hasard dans la commande.
On appelle A l'événement « la puce provient de l'atelier A », B l'événement « elle provient de l'atelier B » et D l'événement « elle est défectueuse ».

1) Compléter le tableau suivant qui décrit la composition de la commande (arrondir à l'unité) :

	nombre de puces défectueuses	nombre de puces non défectueuses	Total
nombre de puces produites par A			
nombre de puces produites par B			
Total			

2) Calculer les probabilités suivantes à l'aide du tableau :
   a. $p(\mathrm{D})$, $p(\mathrm{A}\cap\mathrm{D})$ et $p_{\mathrm{D}}(\mathrm{A})$.
   b. $p(\overline{\mathrm{D}})$, $p(\overline{\mathrm{D}}\cap\mathrm{B})$ et $p_{\overline{\mathrm{D}}}(\mathrm{B})$.
   c. Remplir l'arbre ci-contre :



<u>**Exercice 2 :**</u> **(14 points)**

Partie A **(9 points : 1 + 0,5 + 1 + 1 + 1 + 1 + 0,5 + 1,5 + 1,5)**

Une usine produit des articles dont 3 % présentent des défauts. En vue d'un contrôle de qualité, on constitue au hasard un échantillon de 600 articles tirés de la production.
La production est assez importante pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à la répétition de 600 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.
On désigne par X la variable aléatoire qui associe à tout échantillon de 600 articles le nombre d'articles défectueux.

1) a. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ?
   b. Quelles valeurs peut prendre X ?
2) Déterminer une valeur arrondie à 10^{-4} près de chacun des évènements suivants :
   a. $p(\mathrm{X}=12)$. Interpréter le résultat.
   b. « L'échantillon contient au plus (au maximum) 16 articles défectueux ».
   c. « L'échantillon contient au moins 20 articles défectueux » ;
   d. Déterminer le plus petit entier k tel que $p(\mathrm{X}\leq k)\geq 0,9999$.
3) En moyenne, combien y a-t-il d'articles défectueux ?
4) Déterminer l'intervalle de fluctuation de la fréquence au seuil de 95 % ?
5) Quelle doit être la taille de l'échantillon pour que la probabilité qu'il y ait au moins un article défectueux soit supérieure à 0,999 ? (nb : le résultat est inférieur à 600)

Partie B **(5 points : 1 + 1 + 1,5 + 1,5)**

La direction de l'usine décide de mettre en place un contrôle de qualité. Le contrôle des articles produits s'effectue selon les probabilités conditionnelles suivantes :

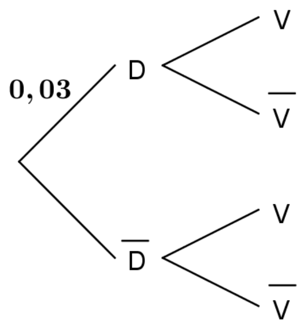
- sachant qu'un article est sans défaut, on l'accepte avec une probabilité de 0,98 ;
- sachant qu'un article présente des défauts, on le refuse avec une probabilité de 0,97.

Les articles acceptés à l'issue du contrôle de qualité sont mis en vente.
On prélève au hasard dans la production de l'entreprise un article qui va être contrôlé.
On note les évènements suivants :

D : « L'article présente des défauts » ;
V : « L'article est mis en vente ».

$\overline{D}$ et $\overline{V}$ sont respectivement les évènements contraires des évènements D et V.

1) Recopier et compléter l'arbre probabiliste modélisant la situation :



2)
   a. Calculer la probabilité qu'un article présente des défauts et soit mis en vente.
   b. Montrer que la probabilité qu'un article soit mis en vente à l'issue du contrôle de qualité est égale à 0,9515.

3) La direction de l'usine souhaite que parmi les articles mis en vente il y ait moins de 0,1 % d'articles défectueux.
Ce contrôle de qualité permet-il d'atteindre cet objectif ?

Contrôle sur la loi binomiale – CORRIGE – M. Quet

Exercice 1 :

Deux entreprises A et B fabriquent des puces électroniques.
Pour une commande de 10 000 pièces, A en a produit 70% et B en a produit 30%.
L'atelier A produit 5% de puces défectueuses et B en produit 2%.
On prend une puce au hasard dans la commande.
On appelle A l'événement « la puce provient de l'atelier A », B l'événement « elle provient de l'atelier B » et D l'événement « elle est défectueuse ».

1) Compléter le tableau suivant qui décrit la composition de la commande (arrondir à l'unité) :

	nombre de puces défectueuses	nombre de puces non défectueuses	Total
nombre de puces produites par A	350	6 650	7 000
nombre de puces produites par B	60	2 940	3 000
Total	410	9 590	10 000

2) Calculer les probabilités suivantes à l'aide du tableau :

a. $p(\mathrm{D}) = \dfrac{\text{nb puces défectueuses}}{\text{nb puces}} = \dfrac{410}{10000} = 0,041$

$p(\mathrm{A} \cap \mathrm{D}) = \dfrac{\text{nb puces défectueuses fabriquées par A}}{\text{nb puces}} = \dfrac{350}{10000} = 0,035$

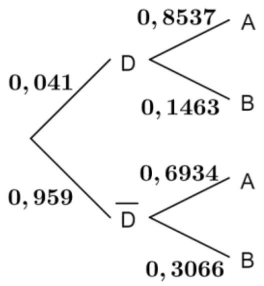
$p_{\mathrm{D}}(\mathrm{A}) = \dfrac{\text{nb puces défectueuses fabriquées par A}}{\text{nb puces défectueuses}} = \dfrac{350}{410} \simeq 0,8537$

b. $p(\overline{\mathrm{D}}) = 1 - p(\mathrm{D}) = 1 - 0,041 = 0,959$

$p(\overline{\mathrm{D}} \cap \mathrm{B}) = \dfrac{\text{nb puces non défectueuses fabriquées par B}}{\text{nb puces}} = \dfrac{2940}{10000} = 0,2940$

$p_{\overline{\mathrm{D}}}(\mathrm{B}) = \dfrac{\text{nb puces non défectueuses fabriquées par B}}{\text{nb puces non défectueuses}} = \dfrac{2940}{9590} \simeq 0,3066$

c. Remplir l'arbre ci-contre :



Exercice 2 :

Partie A

Une usine produit des articles dont 3 % présentent des défauts. En vue d'un contrôle de qualité, on constitue au hasard un échantillon de 600 articles tirés de la production.
La production est assez importante pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à la répétition de 600 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.
On désigne par X la variable aléatoire qui associe à tout échantillon de 600 articles le nombre d'articles défectueux.

1)

a. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ?

Les prélèvements sont constitués de manière identique et indépendante et présentent ou ne présentent pas un défaut. La variable comptant le nombre de pièces ayant un défaut suit une loi binomiale de paramètres $n = 600$ et $p = 0,03$.

b. Quelles valeurs peut prendre X ?

Au minimum, X vaut 0, au maximum, il vaut 600 : X peut prendre toutes les valeurs entières comprises entre 0 et 600 inclus :

$$\mathrm{X} \in [\![0;600]\!].$$

2) Déterminer une valeur arrondie à 10^{-4} près de chacun des évènements suivants :

a. $p(\mathrm{X}=12)$. Interpréter le résultat.

$$p(\mathrm{X}=12) = \binom{600}{12} \times 0,03^{12} \times 0,97^{588} \simeq 0,0360.$$

La probabilité que parmi les 600 articles, 12 présentent un défaut, est égale à 3,6 %.

b. « L'échantillon contient au plus (au maximum) 16 articles défectueux ».

$$p(\mathrm{X} \leq 16) \simeq 0,3724$$

c. « L'échantillon contient au moins 20 articles défectueux » ;

$$p(\mathrm{X} \geq 20) = 1 - p(\mathrm{X} \leq 19) \simeq 0,3477$$

d. Déterminer le plus petit entier k tel que $p(\mathrm{X} \leq k) \geq 0,9999$.

→on trouve $p(\mathrm{X} \leq 34) \simeq 0,999807$ et $p(\mathrm{X} \leq 35) \simeq 0,999908$

donc pour $k = 35$

3) En moyenne, combien y a-t-il d'articles défectueux ?

L'espérance de la loi binomiale est :

$$E(\mathrm{X}) = n \times p = 600 \times 0,03 = 18.$$

En moyenne, on trouve 18 articles défectueux sur les 600 sélectionnées.

4) Déterminer l'intervalle de fluctuation de la fréquence au seuil de 95 % ?

Le plus petit entier a tel que $p(\mathrm{X} \leq a) \geq 0,025$ est : $a = 10$.

Le plus petit entier b tel que $p(\mathrm{X} \leq b) \geq 0,975$ est : $b = 27$.

L'intervalle de fluctuation de la fréquence au seuil de 95% est :

$$\left[\frac{10}{600};\frac{27}{600}\right] \simeq [0,0167;0,045].$$

Dans 95% des cas, la fréquence d'articles défectueux est comprise entre 1,67% et 4,33%.

5) Quelle doit être la taille minimale de l'échantillon pour que la probabilité qu'il y ait au moins un article défectueux soit supérieure à 0,999 ?

La binomiale cette fois est de la forme : $B(n;0,03)$.

On cherche à résoudre :

$$p(\mathrm{X} \geq 1) > 0,999$$

$$\Leftrightarrow \; 1 - p(\mathrm{X}=0) > 0,999$$

$$\Leftrightarrow \; 1 - \binom{600}{0} \times 0,03^{0} \times 0,97^{n} > 0,999$$

$\Leftrightarrow \; 1-0,97^n > 0,999$

$\Leftrightarrow \; -0,97^n > 0,999-1$

$\Leftrightarrow \; -0,97^n > -0,001$

$\Leftrightarrow \; -0,97^n \times (-1) < -0,001 \times (-1)$

$\Leftrightarrow \; 0,97^n < 0,001$

$\Leftrightarrow \; \ln\left(0,97^n\right) < \ln 0,001$ car la fonction logarithme est strictement croissante

$\Leftrightarrow \; n \times \ln 0,97 < \ln 0,001$

$\Leftrightarrow \; n > \dfrac{\ln 0,001}{\ln 0,97}$ car $\ln 0,97 < 0$

$\Leftrightarrow \; n > 226,7$

Le rang est cherché est $n = 227$.

Vérification :

Pour $B(226;0,03) \rightarrow$ $p(\mathrm{X} \geq 1) \simeq 0,998976$

Pour $B(227;0,03) \rightarrow$ $p(\mathrm{X} \geq 1) \simeq 0,999006$

Pour $B(228;0,03) \rightarrow$ $p(\mathrm{X} \geq 1) \simeq 0,999036$

Partie B

La direction de l'usine décide de mettre en place un contrôle de qualité. Le contrôle des articles produits s'effectue selon les probabilités conditionnelles suivantes :

- sachant qu'un article est sans défaut, on l'accepte avec une probabilité de 0,98 ;
- sachant qu'un article présente des défauts, on le refuse avec une probabilité de 0,97.

Les articles acceptés à l'issue du contrôle de qualité sont mis en vente.

On prélève au hasard dans la production de l'entreprise un article qui va être contrôlé.

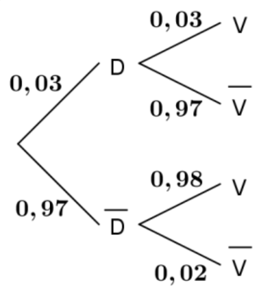
On note les évènements suivants :

D : « L'article présente des défauts » ;

V : « L'article est mis en vente ».

$\overline{\mathrm{D}}$ et $\overline{\mathrm{V}}$ sont respectivement les évènements contraires des évènements D et V.

1) Recopier et compléter l'arbre probabiliste modélisant la situation :



2)

a. Calculer la probabilité qu'un article présente des défauts et soit mis en vente.

$$p(\mathrm{D} \cap \mathrm{V}) = p(\mathrm{D}) \times p_{\mathrm{D}}(\mathrm{V}) = 0,03 \times 0,03 = 0,0009$$

b. Montrer que la probabilité qu'un article soit mis en vente à l'issue du contrôle de qualité est égale à 0,9515.

D et $\overline{\mathrm{D}}$ forment une partition de l'univers.

D'après la loi des probabilités totales :

$$p(\mathrm{V}) = p(\mathrm{D} \cap \mathrm{V}) + p\left(\overline{\mathrm{D}} \cap \mathrm{V}\right) = 0,0009 + p\left(\overline{\mathrm{D}}\right) \times p_{\overline{\mathrm{D}}}(\mathrm{V})$$

$$= 0,0009 + 0,97 \times 0,98 = 0,9515$$

3) La direction de l'usine souhaite que parmi les articles mis en vente il y ait moins de 0,1 % d'articles défectueux. Ce contrôle de qualité permet-il d'atteindre cet objectif ?

$p_{\mathrm{V}}(\mathrm{D}) = \dfrac{p(\mathrm{D} \cap \mathrm{V})}{p(\mathrm{V})} = \dfrac{0,0009}{0,9515} \simeq 0,00095$, soit environ 0,09 % : l'objectif est atteint.