Exercices sur la notion de limite pour les suites numériques

Exercice 1A.1

Pour chacune des suites, en calculant différents termes, conjecturer la valeur limite de u_n quand n devient infiniment grand (c'est-à-dire quand n tend vers $+\infty$).

1) $u_n = \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$
2) $u_n = 2n^2 - 1$ pour $n \in \mathbb{N}$
3) $u_n = \frac{n}{n^2+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$
4) $u_n = 2^n$ pour $n \in \mathbb{N}$
5) $u_n = \frac{2n+1}{n-5}$ pour $n \geq 6$
6) $u_n = (-1)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$

Exercice 1A.2

On considère la suite (u_n) définie par récurrence par $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Calculer u_1 ; u_2 ; u_3 ; u_4 ; u_5.
2) En utilisant une calculatrice ou un ordinateur, donner un tableau des valeurs approchées à 10^{-3} près de u_1 à u_{10}. Conjecturer la valeur limite l de la suite (u_n).
3) En utilisant un algorithme, calculer u_{10}.
4) En utilisant un algorithme, déterminer le premier entier pour lequel on a $u_n < 2{,}0000001$.

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. Quet

Exercice 1A.1

Pour chacune des suites, en calculant différents termes, conjecturer la valeur limite de u_n quand n devient infiniment grand (c'est-à-dire quand n tend vers $+\infty$).

1) $u_n = \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$ → $u_{100\,000} = \frac{1}{100\,000} = 0{,}000\,01$: la limite semble être 0.

2) $u_n = 2n^2 - 1$ pour $n \in \mathbb{N}$ → $u_{1000} = 2 \times 1000^2 - 1 = 1\,999999$: la limite semble être $+\infty$.

3) $u_n = \frac{n}{n^2+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$ → $u_{1000} = \frac{1000}{1000^2+1} \simeq 0{,}001$: la limite semble être 0.

4) $u_n = 2^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ → $u_{25} = 2^{25} = 33554432$: la limite semble être $+\infty$.

5) $u_n = \frac{2n+1}{n-5}$ pour $n \geq 6$ → $u_{10000} = \frac{2 \times 10\,000 + 1}{10\,000 - 5} \simeq 2{,}0011$: la limite semble être 2.

6) $u_n = (-1)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ → $u_{1000} = (-1)^{1000} = 1$ et $u_{1001} = (-1)^{1001} = -1$: pas de limite.

Exercice 1A.2

On considère la suite (u_n) définie par récurrence par $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 \end{cases}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

1) $u_1 = 3$; $u_2 = 2{,}5$; $u_3 = 2{,}25$; $u_4 = 2{,}125$; $u_5 = 2{,}0625$.

2) *En utilisant une calculatrice ou un ordinateur, donner un tableau des valeurs approchées à 10^{-3} près de u_1 à u_{10}. Conjecturer la valeur limite l de la suite (u_n).*

$u_6 = 2{,}03125$; $u_7 = 2{,}015625$; $u_8 = 2{,}0078125$; $u_9 = 2{,}00390625$; $u_{10} = 2{,}001953125$.

La limite de cette suite semble être la valeur 2.

3) *En utilisant un algorithme, calculer u_{10}.*

```
n = int(input("Veuillez saisir un rang:"))
u = 4
for i in range(1,n+1):
   u = 0.5*u+1
print("La valeur de u(" , n , ") est :" , u)
```

Résultats : La valeur de u(10) est : 2.001953125

4) *En utilisant un algorithme, déterminer le premier entier pour lequel on a $u_n < 2{,}0000001$.*

```
n = 0
u = 4
while u > 2.0000001:
   u = 0.5*u + 1
   n += 1
print("Le rang cherché est :",n)
```

Résultats : Le rang cherché est : 25