Suites divergentes vers l'infini

Exercice 2A.1 On considère la suite (u_n) définie par $u_n = 2n^2 - 500$ pour $n \geq 1$.

1) Justifier que cette suite diverge vers $+\infty$.
2) A partir de quel rang tous les termes de la suite dépassent 1 000 000 ?

Exercice 2A.2 On considère la suite (u_n) définie par $u_n = 5n^2 + 10n + 25$ pour $n \geq 1$.

1) Justifier que cette suite diverge vers $+\infty$.
2) A partir de quel rang tous les termes de la suite dépassent 100 000 ?

Exercice 2A.3 On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{3n^2 + 100}{7n}$ pour $n \geq 1$.

1) Donner, en utilisant une calculatrice ou un tableur, des valeurs approchées à 10^{-2} près de u_1, u_2, … u_7.
2) Observer la représentation graphique de la suite (u_n) donnée par une calculatrice ou un tableur.
   Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de la suite (u_n) ?
3) On considère A un nombre réel. En utilisant un algorithme, déterminer, dans les différents cas ci-dessous, le premier entier n pour lequel u_n appartient à l'intervalle $]A;+\infty[$:

A	10	20	100	5489	12 548	100 000
n	1	46				

4) Soit A un nombre réel supérieur ou égal à 10.
   Montrer qu'à partir d'un certain rang n_0 à déterminer en fonction de A, tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle $]A;+\infty[$.
   Les valeurs trouvées pour n_0 correspondent-elles au tableau de la question précédente ?
5) Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

Exercice 2A.4 On considère la suite (u_n) définie par $u_n = 5 - 2n^2$ pour $n \geq 0$.

1) Justifier que cette suite (u_n) diverge vers $-\infty$.
2) A partir de quel rang n_0 tous les termes de cette suite (u_n) appartiennent-ils à $]-\infty;-10000[$?

Exercice 2A.5 On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{n^2 + 2n + 5}{n + 3}$ pour $n \geq 0$.

1) Justifier que cette suite (u_n) diverge vers $+\infty$.
2) A partir de quel rang n_0 tous les termes de cette suite (u_n) appartiennent-ils à $]5000;+\infty[$?

Exercice 2A.6 On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{2n^2 + 3}{5n - 2}$ pour $n \geq 3$.

1) Justifier que cette suite (u_n) diverge vers $+\infty$.
2) A partir de quel rang n_0 tous les termes de cette suite (u_n) appartiennent-ils à $]25000;+\infty[$?

Exercice 2A.1

On considère la suite (u_n) *définie par* $u_n = 2n^2 - 500$ *pour* $n \geq 1$.

1) *Justifier que cette suite diverge vers* $+\infty$.

Soit A un réel quelconque, si grand soit-il.

$$u_n > \mathrm{A} \iff 2n^2 - 500 > \mathrm{A} \iff 2n^2 > \mathrm{A}+500 \iff n^2 > \frac{\mathrm{A}+500}{2} \iff n > \sqrt{\frac{\mathrm{A}+500}{2}}$$

Soit n_0 le plus petit entier positif supérieur à $\sqrt{\frac{\mathrm{A}+500}{2}}$:

Si $n \geq n_0$ alors $u_n > \mathrm{A}$.

2) *A partir de quel rang tous les termes de la suite dépassent 1 000 000 ?*

Si $\mathrm{A} = 1000000$ alors $\sqrt{\frac{\mathrm{A}+500}{2}} \simeq 707,28$.

Le plus petit entier supérieur à 707,28 est $\mathrm{n}_0 = 708$.

Si $\mathrm{n} \geq 708$ alors $u_n > 1000000$.

Exercice 2A.2

On considère la suite (u_n) *définie par* $u_n = 5n^2 + 10n + 25$ *pour* $n \geq 1$.

1) *Justifier que cette suite diverge vers* $+\infty$.

Soit A un réel quelconque, si grand soit-il. On suppose que $\mathrm{A} > 50$.

$$u_n > \mathrm{A} \iff 5n^2 + 10n + 25 > \mathrm{A} \iff 5n^2 + 10n + 25 - \mathrm{A} > 0$$

$$\Delta = 10^2 - 4 \times 5 \times (25 - \mathrm{A}) = 100 - 500 + 20\mathrm{A} = -400 + 20\mathrm{A} = 20(\mathrm{A} - 20)$$

Or $\mathrm{A} > 50$ donc : $\Delta > 0$ d'où deux solutions :

$$n_1 = \frac{-10 - \sqrt{20(\mathrm{A}-20)}}{2 \times 5} = \frac{-10 - \sqrt{20(\mathrm{A}-20)}}{10} \quad \text{et} \quad n_2 = \frac{-10 + \sqrt{20(\mathrm{A}-20)}}{10}$$

$a = 5$ donc « la parabole est orientée vers le haut ».

On pose $n_0 = E\left(\frac{-10 + \sqrt{20(\mathrm{A}-20)}}{10}\right) + 1$:

$$\forall n \geq n_0 \ : \ 5n^2 + 10n + 25 - \mathrm{A} > 0$$

2) *A partir de quel rang tous les termes de la suite dépassent 100 000 ?*

Pour $\mathrm{A} = 100000$: $n_0 = E\left(\frac{-10 + \sqrt{20(100000 - 20)}}{10}\right) + 1 = 141$

$$\forall n \geq 141 \ : \ 5n^2 + 10n + 25 - \mathrm{A} > 100000$$

→ $u_{140} = 99425$ et $u_{141} = 100840$

Exercice 2A.3

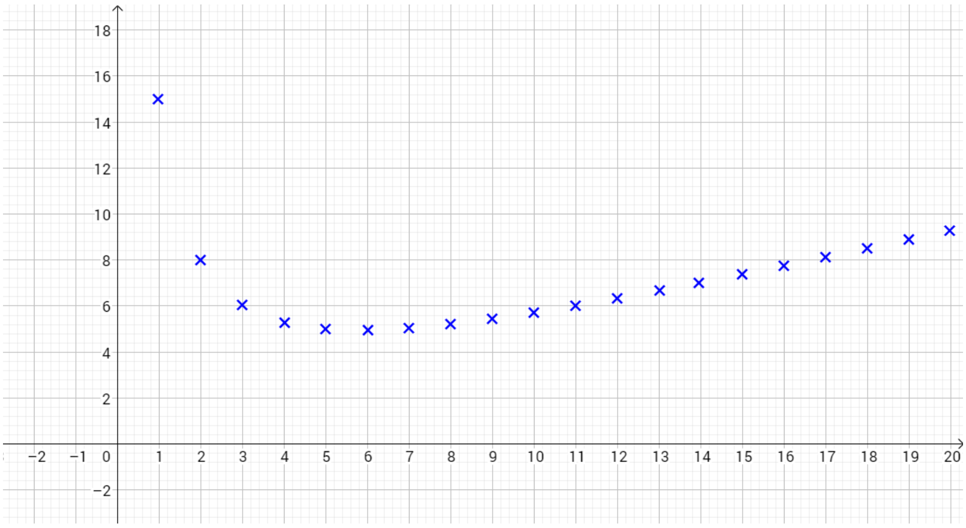
On considère la suite (u_n) *définie par* $u_n = \frac{3n^2 + 100}{7n}$ *pour* $n \geq 1$.

1) *Donner, en utilisant une calculatrice ou un tableur, des valeurs approchées à* 10^{-2} *près de* u_1, u_2, … u_7.

$u_1 \simeq 14,71$; $u_2 = 8$; $u_3 \simeq 6,05$; $u_4 \simeq 5,29$; $u_5 = 5$; $u_6 \simeq 4,95$; $u_7 \simeq 5,04$

2) *Observer la représentation graphique de la suite* (u_n) *donnée par une calculatrice ou un tableur.*

Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de la suite (u_n) ?



La suite (u_n) semble admettre $+\infty$ comme limite.

3) *On considère A un nombre réel. En utilisant un algorithme, déterminer, dans les différents cas ci-dessous, le premier entier n pour lequel u_n appartient à l'intervalle $]A;+\infty[$:*

```
n = 0
U = 0
A = eval(input("saisir un seuil positif : "))
if A < 0 :
    print("ERREUR : A est négatif")
while U<=A:
    n += 1
    U = (3*n*n + 100) / (7*n)
print("Le seuil cherché est : " , n)
print ("U = " , U)
```

A	10	20	100	5489	12 548	100 000
n	1	46	234	12 808	29 279	233 334

Algorithme lancé
Saisir la valeur positive A :
Entrer A : 100000
Rang n cherché : 233334
Algorithme terminé

4) *Soit A un nombre réel supérieur ou égal à 10.*
Montrer qu'à partir d'un certain rang n_0 à déterminer en fonction de A, tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle $]A;+\infty[$.

Les valeurs trouvées pour n_0 correspondent-elles au tableau de la question précédente ?

Soit $A \geq 10$: $u_n > A \iff \dfrac{3n^2+100}{7n} > A \iff 3n^2+100 > A\times 7n \iff 3n^2 - 7A\times n + 100 > 0$

Etude du discriminent : $\Delta = (-7A)^2 - 4\times 3\times 100 = 49A^2 - 1200$

Or $A \geq 10$ donc $\Delta > 0$:

→Les racines de ce polynôme sont : $n_1 = \dfrac{7A-\sqrt{49A^2-1200}}{2\times 3} = \dfrac{7A-\sqrt{49A^2-1200}}{6}$

$$\text{et} \quad n_2 = \frac{7A+\sqrt{49A^2-1200}}{2\times 3} = \frac{7A+\sqrt{49A^2-1200}}{6}$$

Le signe de n^2 indique que le polynôme est positif si $n > \dfrac{7A+\sqrt{49A^2-1200}}{6}$.

Ainsi soit n_0 le premier entier positif supérieur à $\dfrac{7A+\sqrt{49A^2-1200}}{6}$:

Si $n \geq n_0$ alors $u_n \in \left]A;+\infty\right[$.

A	10	20	100	5489	12 548	100 000
n	22	46	234	12 808	29 279	233 334

Hormis la valeur $u_1 \simeq 14,71$, ce n'est qu'à partir du 22ème rang que la suite dépasse la valeur 10.

5) *Quelle est la limite de la suite (u_n) ?*

La question précédente montre que quelle que soit la valeur A proposée, on peut déterminer un rang n_0 calculé en fonction de la valeur A, tel que pout tout $n \geq \mathrm{n}_0$, tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $\left]A;+\infty\right[$.

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Exercice 2A.4

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = 5-2n^2$ pour $n \geq 0$.

1) *Justifier que cette suite (u_n) diverge vers $-\infty$.*

Soit A un réel strictement négatif.

Peut-on déterminer un rang n_0 tel que si $n \geq \mathrm{n}_0$ alors $u_n < \mathrm{A}$?

$$u_n < \mathrm{A} \iff 5-2n^2 < \mathrm{A} \iff -2n^2 < \mathrm{A}-5 \iff n^2 > \frac{\mathrm{A}-5}{-2}$$

$$\iff n^2 > \frac{5-\mathrm{A}}{2} \iff n > \sqrt{\frac{5-\mathrm{A}}{2}}$$

Soit n_0 le plus petit entier supérieur à $\sqrt{\dfrac{5-\mathrm{A}}{2}}$: si $n > n_0$ alors $u_n < \mathrm{A}$:

→ la suite (u_n) n'admet pas de minorant et diverge vers $-\infty$.

2) *A partir de quel rang n_0 tous les termes de cette suite (u_n) appartiennent-ils à $\left]-\infty;-10000\right[$?*

$\mathrm{A} = -10000$ donc $\sqrt{\dfrac{5-\mathrm{A}}{2}} \simeq 70,7$: on prend $\mathrm{n}_0 = 71$.

→si $n \geq 71$ alors $u_n \in \left]-\infty;-10000\right[$:

Vérification : u_{70} -9795 et u_{71} -10077.

Exercice 2A.5

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{n^2+2n+5}{n+3}$ pour $n \geq 0$.

1) *Justifier que cette suite (u_n) diverge vers $+\infty$.*

Soit A un réel strictement positif.

Peut-on déterminer un rang n_0 tel que si $n \geq \mathrm{n}_0$ alors $u_n > \mathrm{A}$?

$$u_n > \mathrm{A} \iff \frac{n^2+2n+5}{n+3} > \mathrm{A} \iff n^2+2n+5 > \mathrm{A}(n+3) \iff n^2+(2-\mathrm{A})n+5-3\mathrm{A} > 0$$

On remarque que si A > 2 alors $5-3\mathrm{A}<0$.

Discriminant : $\Delta=(2-\mathrm{A})^2-4\times1\times(5-3\mathrm{A})$

Or $5-3\mathrm{A}<0$ donc on peut affirmer que Δ est positif.

Simplifions : $\Delta=4-4\mathrm{A}+\mathrm{A}^2-20+12\mathrm{A}=\mathrm{A}^2+8\mathrm{A}-16$

On lance une nouvelle étude du signe de Δ :

→ $\Delta'=8^2-4\times1\times(16)=128$

d'où $A_1=\frac{-8-\sqrt{128}}{2}=-4-4\sqrt{2}$ et $A_2=\frac{-8+\sqrt{128}}{2}=-4+4\sqrt{2}$

Ainsi : $\Delta>0$ si $A>A_2$. On obtient :

$$x_1=\frac{-(2-\mathrm{A})-\sqrt{\mathrm{A}^2+8\mathrm{A}-16}}{2} \quad \text{et}$$

$$x_2=\frac{-(2-\mathrm{A})+\sqrt{\mathrm{A}^2+8\mathrm{A}-16}}{2}=\frac{\mathrm{A}-2+\sqrt{\mathrm{A}^2+8\mathrm{A}-16}}{2}$$

Sur l'intervalle $]x_2;+\infty[$: $n^2+(2-\mathrm{A})n+5-3\mathrm{A}>0$.

Soit n_0 le plus petit entier supérieur à $\frac{\mathrm{A}-2+\sqrt{\mathrm{A}^2+8\mathrm{A}-16}}{2}$: si $n>n_0$ alors $u_n>\mathrm{A}$:

→la suite (u_n) n'admet pas de majorant et diverge vers $+\infty$.

2) *A partir de quel rang* n_0 *tous les termes de cette suite* (u_n) *appartiennent-ils à* $]5000;+\infty[$ *?*

$$\frac{\mathrm{A}-2+\sqrt{\mathrm{A}^2+8\mathrm{A}-16}}{2}\simeq 5000{,}998 \text{ donc } \mathrm{n}_0=5001$$

→si $n\geq 5001$ alors $u_n\in]5000;+\infty[$:

Vérification : $u_{5000}\simeq 4999{,}002$ et $u_{5001}\simeq 5000{,}002$.

Exercice 2A.6

On considère la suite (u_n) *définie par* $u_n=\frac{2n^2+3}{5n-2}$ *pour* $n\geq 3$.

1) *Justifier que cette suite* (u_n) *diverge vers* $+\infty$.
2) *A partir de quel rang* n_0 *tous les termes de cette suite* (u_n) *appartiennent-ils à* $]25000;+\infty[$ *?*

1) Soit A un réel strictement positif.

Peut-on déterminer un rang n_0 tel que si $n\geq\mathrm{n}_0$ alors $u_n>\mathrm{A}$?

$$u_n>\mathrm{A} \iff \frac{2n^2+3}{5n-2}>\mathrm{A} \quad \text{or } n\geq 3 \text{ donc } 5n-2>0.$$

$$u_n>\mathrm{A} \iff 2n^2+3>\mathrm{A}(5n-2) \iff 2n^2-5\mathrm{A}n+3+2\mathrm{A}>0$$

On remarque que $3+2\mathrm{A}>0$.

Discriminant : $\Delta=(-5\mathrm{A})^2-4\times2\times(3+2\mathrm{A})=25\mathrm{A}^2-16\mathrm{A}-24$

Une deuxième discriminant : $\Delta'=(-16)^2-4\times25\times(-24)=256+2400=2656$

$$\mathrm{A}_1=\frac{-(-16)-\sqrt{2656}}{2\times25}=\frac{16-\sqrt{2656}}{50}\simeq-0{,}712 \quad \text{et}$$

$$A_2 = \frac{-(-16)+\sqrt{2656}}{2\times 25} = \frac{16+\sqrt{2656}}{50} \simeq 1,351$$

Si $A > A_2$: le discriminant est strictement positif.

$$x_1 = \frac{-(-5A)-\sqrt{25A^2-16A-24}}{2\times 2} = \frac{5A-\sqrt{25A^2-16A-24}}{4}$$

et $$x_2 = \frac{-(-5A)+\sqrt{25A^2-16A-24}}{2\times 2} = \frac{5A+\sqrt{25A^2-16A-24}}{4}$$

Sur l'intervalle $]x_2;+\infty[$: $2n^2-5An+3+2A>0$.

Soit n_0 le plus petit entier supérieur à $\frac{5A+\sqrt{25A^2-16A-24}}{4}$: si $n > n_0$ alors $u_n > A$:

→la suite (u_n) n'admet pas de majorant et diverge vers $+\infty$.

2) A partir de quel rang n_0 tous les termes de cette suite (u_n) appartiennent-ils à $]25000;+\infty[$?

Si A = 25 000, alors $\frac{5A+\sqrt{25A^2-16A-24}}{4} \simeq 62\,499,6$ donc $n_0 = 62\,500$.

→si $n \geq 62\,500$ alors $u_n \in]25000;+\infty[$:

Vérification : $u_{62499} \simeq 24999,76$ et $u_{62500} \simeq 25000,16$.