Exercice 2B.1

On considère la suite (u_n) définie par récurrence par $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Calculer u_1 ; u_2 ; u_3 ; u_4 ; u_5.
2) En utilisant une calculatrice ou un ordinateur, donner un tableau des valeurs approchées à 10^{-3} près de u_1 à u_{10}. Conjecturer la valeur limite l de la suite (u_n).
3) En utilisant un algorithme, déterminer le premier entier pour lequel on a $u_n < 2{,}0000001$.

Exercice 2B.2

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n + 2 \end{cases}$

1) En utilisant une calculatrice ou un ordinateur, donner des valeurs approchées de u_1 à u_{10} puis des valeurs approchées de u_{20} et de u_{50}.

   Emettre une conjecture sur la valeur limite de la suite (u_n).
2) Soit h un réel strictement positif. Montrer que si $5-h < u_n < 5+h$ alors $5-h < u_{n+1} < 5+h$.
3) Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 8$, on a : $4{,}9 < u_n < 5{,}1$.
4) Déterminer un entier N tel que pour tout $n \geq N$ on ait $4{,}999 < u_n < 5{,}001$.

Exercice 2B.3

On considère la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $u_n = \frac{1}{n}$

1) Déterminer un entier naturel N tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in \left]-0{,}1;0{,}1\right[$.
2) Justifier en utilisant la définition que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

Exercice 2B.4

On considère la suite définie par $u_n = \frac{2n+1}{n}$ pour $n \geq 1$.

1) Calculer u_1, u_2, $\ldots u_{10}$ et en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.
2) Observer la représentation graphique de la suite (u_n) donnée par une calculatrice ou un ordinateur.

   Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de la suite (u_n) ?
3) On considère l'intervalle ouvert de centre 2 et de rayon 0,01 , c'est-à-dire l'intervalle $\left]1{,}99;2{,}01\right[$.

   Montrer qu'à partir d'un certain rang n_0 à déterminer, tous les termes de la suite (u_n) appartiennent à cet intervalle.
4) On considère l'intervalle ouvert de centre 2 et de rayon r , c'est-à-dire l'intervalle $\left]2-r;2+r\right[$.

   Montrer qu'à partir d'un certain rang n_0 à déterminer en fonction de r, tous les termes de la suite (u_n) appartiennent à cet intervalle.
5) Démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$.

Exercice 2B.5

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{3n-8}{n+5}$ pour $n \geq 0$.

1) Identifier une possible limite L pour cette suite (u_n).
2) Justifier que L est la limite de cette suite (u_n).
3) A partir de quel rang n_0 tous les termes de cette suite (u_n) appartiennent-ils à $]L-0,0001;L+0,0001[$?

Exercice 2B.6

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = 5 - \frac{1}{3n}$ pour $n > 0$.

1) Identifier une possible limite L pour cette suite (u_n).
2) Justifier que L est la limite de cette suite (u_n).
3) A partir de quel rang n_0 tous les termes de cette suite (u_n) appartiennent-ils à $]L-0,0002;L+0,0002[$?

Exercice 2B.7

Justifier que la suite $(-1)^n$ n'a pas de limite.

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. Quet

Exercice 2B.1

On considère la suite (u_n) *définie par récurrence par* $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 \end{cases}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

1) $u_1 = 3$; $u_2 = 2,5$; $u_3 = 2,25$; $u_4 = 2,125$; $u_5 = 2,0625$.

2) *En utilisant une calculatrice ou un ordinateur, donner un tableau des valeurs approchées à* 10^{-3} *près de* u_1 *à* u_{10}. *Conjecturer la valeur limite l de la suite* (u_n).

$u_6 = 2,03125$; $u_7 = 2,015625$; $u_8 = 2,0078125$; $u_9 = 2,00390625$; $u_{10} = 2,001953125$.

La limite de cette suite semble être la valeur 2.

3) *En utilisant un algorithme, déterminer le premier entier pour lequel on a* $u_n < 2,0000001$.

```
n = 0
u = 4
while u > 2.0000001:
    u = 0.5*u + 1
    n += 1
print("le rang cherché est :",n)
```

Résultats : le rang cherché est : 25

Exercice 2B.2

On considère la suite (u_n) *définie par* $\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n + 2 \end{cases}$

1) *En utilisant une calculatrice ou un ordinateur, donner des valeurs approchées de* u_1 *à* u_{10} *puis des valeurs approchées de* u_{20} *et de* u_{50}.

Emettre une conjecture sur la valeur limite de la suite (u_n).

$u_1 = 8$; $u_2 = 6,8$; $u_3 = 6,08$; $u_4 = 5,648$; $u_5 = 5,3888$.

$u_6 = 5,23328$; $u_7 = 5,139968$; $u_8 = 5,0839808$; $u_9 = 5,05038848$; $u_{10} = 5,030233088$.

$u_{20} \simeq 5,000182$; $u_{50} \simeq 5,00000000004$.

La limite de la suite semble être 5.

2) *Soit h un réel strictement positif. Montrer que si* $5-h < u_n < 5+h$ *alors* $5-h < u_{n+1} < 5+h$.

$$5-h < u_n < 5+h$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{5}\times(5-h) < \frac{3}{5}\times u_n < \frac{3}{5}\times(5+h)$$

$$\Leftrightarrow 3-\frac{3}{5}h+2 < \frac{3}{5}u_n+2 < 3+\frac{3}{5}h+2$$

$$\Leftrightarrow 5-\frac{3}{5}h < u_{n+1} < 5+\frac{3}{5}h$$

Or $h>0$ donc $\frac{3}{5}h < h \Leftrightarrow \frac{3}{5}h+5 < h+5$

et $-\frac{3}{5}h > -h \Leftrightarrow -h < -\frac{3}{5}h \Leftrightarrow 5-h < 5-\frac{3}{5}h$

Donc : $5-h < 5-\frac{3}{5}h < u_{n+1} < 5+\frac{3}{5}h < 5+h$: CQFD

3) *Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 8$, on a :* $4{,}9 < u_n < 5{,}1$.

Initialisation : $u_8 = 5{,}0839808$ donc $4{,}9 < u_8 < 5{,}1$: l'initialisation est vérifiée.

Hérédité : supposons qu'il existe un entier $n \geq 8$ tel que $4{,}9 < u_n < 5{,}1$.

Cette propriété est-elle vérifiée au rang suivant ? A-t-on : $4{,}9 < u_{n+1} < 5{,}1$?

Par hypothèse :

$$4{,}9 < u_n < 5{,}1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3}{5} \times 4{,}9 < \frac{3}{5} \times u_n < \frac{3}{5} \times 5{,}1$$

$$\Leftrightarrow \quad 2{,}94 < \frac{3}{5} u_n < 3{,}06$$

$$\Leftrightarrow \quad 2{,}94 + 2 < \frac{3}{5} u_n + 2 < 3{,}06 + 2$$

$$\Leftrightarrow \quad 4{,}94 < u_{n+1} < 5{,}06$$

Donc $4{,}9 < u_{n+1} < 5{,}1$ et l'hérédité est vérifiée.

Par récurrence, pour tout $n \geq 8$, on a : $4{,}9 < u_n < 5{,}1$.

4) *Déterminer un entier N tel que pour tout $n \geq N$ on ait* $4{,}999 < u_n < 5{,}001$.

```
n = 0
u = 10
while u > 5.001:
    u = 3*u/5 + 2
    n += 1
print("le rang cherché est :",n)
```

Résultats : le rang cherché est : 17

→ $u_{17} \simeq 5{,}000846$

Exercice 2B.3

On considère la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $u_n = \dfrac{1}{n}$

1) *Déterminer un entier naturel N tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in \left]-0{,}1;0{,}1\right[$.*

La fonction inverse est positive et décroissante sur $\left]0;+\infty\right[$ donc la suite (u_n) est également positive et décroissante pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On trouve aisément : $u_{10} = \dfrac{1}{10} = 0{,}1$ et $u_{11} = \dfrac{1}{11} \simeq 0{,}091$.

La suite est décroissante et positive, donc à partir du 11ème rang : $0 < u_n < 0{,}1$.

Ainsi pour $n \geq 11$: $u_n \in \left]-0{,}1;0{,}1\right[$

2) *Justifier en utilisant la définition que* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

Soit $\varepsilon > 0$ un réel si petit soit-il.

$$|u_n - 0| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{1}{\varepsilon}$$ car la fonction inverse est décroissante.

Soit n_0 le plus petit entier supérieur ou égal à $\dfrac{1}{\varepsilon}$:

Si $n > n_0$, alors $u_n \in \left]-\varepsilon;\varepsilon\right[$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Autre méthode :

On considère un intervalle ouvert quelconque $]a;b[$ contenant la valeur 0 : $a<0$ et $b>0$.

La suite (u_n) est positive donc pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $u_n>a$.

En résolvant l'inéquation : $u_n<b \Leftrightarrow \dfrac{1}{n}<b \Leftrightarrow \dfrac{1}{\frac{1}{n}}>\dfrac{1}{b} \Leftrightarrow n>\dfrac{1}{b}$, on remarque qu'à partir d'un rang n_0 égal au premier nombre entier supérieur ou égal à $\dfrac{1}{b}$, on a : $u_n<b$.

Ainsi, quel que soient les réels a positif et b négatif, à partir de ce rang n_0, tous les termes de la suite sont dans l'intervalle ouvert $]a;b[$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$.

<u>Exercice 2B.4</u>

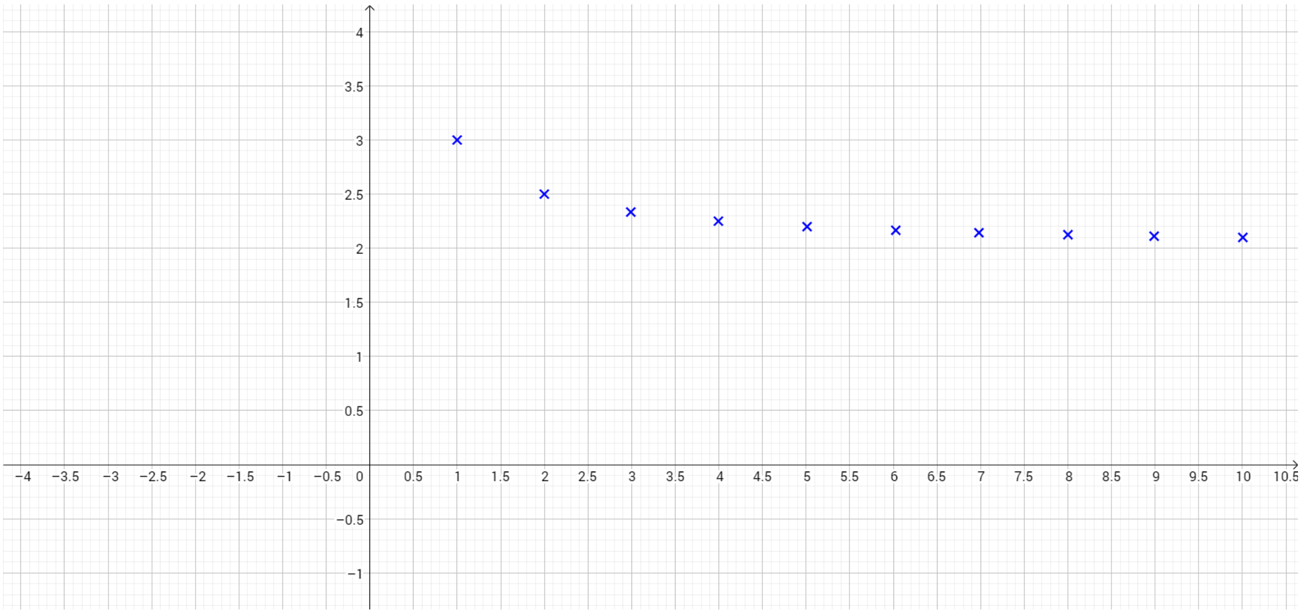
On considère la suite définie par $u_n=\dfrac{2n+1}{n}$ *pour* $n\geq 1$.

1) *Calculer* u_1, u_2, ... u_{10} *et en donner des valeurs approchées à* 10^{-2} *près.*

$u_1=3$; $u_2=2{,}5$; $u_3\simeq 2{,}33$; $u_4=2{,}25$; $u_5=2{,}2$;

$u_6\simeq 2{,}17$; $u_7\simeq 2{,}14$; $u_8=2{,}125$; $u_9\simeq 2{,}11$; $u_{10}=2{,}1$.

2) *Observer la représentation graphique de la suite* (u_n) *donnée par une calculatrice ou un ordinateur. Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de la suite* (u_n) *?*



La suite (u_n) semble admettre la valeur 2 pour limite.

3) *On considère l'intervalle ouvert de centre 2 et de rayon 0,01 , c'est-à-dire l'intervalle* $]1{,}99;2{,}01[$. *Montrer qu'à partir d'un certain rang* n_0 *à déterminer, tous les termes de la suite* (u_n) *appartiennent à cet intervalle.*

Pour $n\geq 1$: $u_n=\dfrac{2n+1}{n}=\dfrac{2n}{n}+\dfrac{1}{n}=2+\dfrac{1}{n}$ donc pour $n\geq 1$: $u_n>2>1{,}99$.

D'autre part : $2+\dfrac{1}{n}<2{,}01 \Leftrightarrow \dfrac{1}{n}<0{,}01 \Leftrightarrow n>\dfrac{1}{0{,}01} \Leftrightarrow n>100$.

Ainsi, pour $n\geq 100$: $u_n\in\,]1{,}99;2{,}01[$

4) *On considère l'intervalle ouvert de centre 2 et de rayon r , c'est-à-dire l'intervalle* $]2-r;2+r[$.

Montrer qu'à partir d'un certain rang n_0 *à déterminer en fonction de r, tous les termes de la suite* (u_n) *appartiennent à cet intervalle.*

Pour $n \geq 1$: $u_n = 2 + \frac{1}{n}$ donc pour $n \geq 1$: $u_n > 2 > 2 - r$.

D'autre part : $2 + \frac{1}{n} < 2 + r \Leftrightarrow \frac{1}{n} < r \Leftrightarrow n > \frac{1}{r}$.

Soit n_0 le plus petit entier supérieur ou égal à $\frac{1}{r}$. Pour $n \geq \mathrm{n}_0$: $u_n \in]2-r;2+r[$: tous les termes de la suite seront dans cet intervalle.

AUTRE METHODE :

$$u_n - 2 = 2 + \frac{1}{n} - 2 = \frac{1}{n}$$

Quel que soit le réel r positif, on a :

$$|u_n - 2| < r \Leftrightarrow \frac{1}{n} < r \Leftrightarrow n > \frac{1}{r}$$ car la fonction inverse est décroissante sur $]0;+\infty[$.

Soit n_0 le plus petit entier supérieur ou égal à $\frac{1}{r}$. Pour $n \geq \mathrm{n}_0$: $|u_n - 2| < r$

→ tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $]2-r;2+r[$.

5) *Démontrer que* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$.

Quel que soit le nombre r choisi, si petit soit-il, on pourra toujours trouver un rang n_0 défini comme le plus petit entier supérieur ou égal à $\frac{1}{r}$, tel que pour $n \geq \mathrm{n}_0$: $u_n \in]2-r;2+r[$.

Par définition : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$.

Exercice 2B.5

On considère la suite (u_n) *définie par* $u_n = \frac{3n-8}{n+5}$ *pour* $n \geq 0$.

1) *Identifier une possible L pour cette suite* (u_n).

$$u_{1000} = \frac{3 \times 1000 - 8}{1000 + 5} \simeq 2{,}977 \quad \text{et} \quad u_{10000} = \frac{3 \times 10\,000 - 8}{10\,000 + 5} \simeq 2{,}998$$

La limite L semble être 3.

2) *Justifier que L est la limite de cette suite* (u_n).

$$|u_n - 3| = \left|\frac{3n-8}{n+5} - 3\right| = \left|\frac{3n-8}{n+5} - \frac{3(n+5)}{n+5}\right| = \left|\frac{3n-8}{n+5} - \frac{3n+15}{n+5}\right| = \left|\frac{3n-8-3n-15}{n+5}\right| = \left|\frac{-23}{n+5}\right| = \frac{23}{n+5}$$

Soit ε un réel strictement positif.

Peut-on déterminer un rang n_0 tel que si $n \geq \mathrm{n}_0$, $|u_n - 3| < \varepsilon$?

$$|u_n - 3| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{23}{n+5} < \varepsilon \Leftrightarrow 23 < \varepsilon(n+5) \Leftrightarrow 23 < \varepsilon n + 5\varepsilon \Leftrightarrow 23 - 5\varepsilon < \varepsilon n$$
$$\Leftrightarrow \frac{23 - 5\varepsilon}{\varepsilon} < n$$

Soit n_0 le plus petit entier supérieur à $\frac{23-5\varepsilon}{\varepsilon}$: si $n \geq n_0$, $|u_n - 3| < \varepsilon$.

Ceci étant vrai pour tout réel ε, on peut conclure que la suite (u_n) a pour limite la valeur 3.

3) *A partir de quel rang n_0 tous les termes de cette suite (u_n) appartiennent-ils à* $]L-0,0001;L+0,0001[$?

Ici : $\varepsilon = 0,0001 \rightarrow \frac{23-5\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{23-5\times 0,0001}{0,0001} = 229995$.

Pour tout $n \geq 229996$: $u_n \in]2,9999;3,0001[$.

Vérification : $u_{229995} = 2,9999$ et $u_{229996} \simeq 2,9999000004$

Exercice 2B.6

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = 5 - \frac{1}{3n}$ pour $n > 0$.

1) *Identifier une possible limite L pour cette suite (u_n).*

On vérifie rapidement que la suite (u_n) semble avoir pour limite la valeur 5.

2) Justifier que L est la limite de cette suite (u_n).

$$u_n - 5 = 5 - \frac{1}{3n} - 5 = -\frac{1}{3n}$$

Soit ε un réel strictement positif.

Peut-on déterminer un rang n_0 tel que si $n \geq n_0$, $|u_n - 5| < \varepsilon$?

$$|u_n - 5| < \varepsilon \iff \left|-\frac{1}{3n}\right| < \varepsilon \iff \frac{1}{3n} < \varepsilon \iff 3n > \frac{1}{\varepsilon} \iff n > \frac{1}{3\varepsilon}$$

Soit n_0 le plus petit entier supérieur à $\frac{1}{3\varepsilon}$: si $n \geq n_0$, $|u_n - 5| < \varepsilon$.

Ceci étant vrai pour tout réel ε, on peut conclure que la suite (u_n) a pour limite la valeur 5.

3) A partir de quel rang n_0 tous les termes de cette suite (u_n) appartiennent-ils à $]L-0,0002;L+0,0002[$?

Ici : $\varepsilon = 0,0002 \rightarrow \frac{1}{3\varepsilon} = \frac{1}{3\times 0,0002} = \frac{1}{0,0006} \simeq 1666,7$.

Soit $n_0 = 1667$: pour tout $n \geq n_0$: $u_n \in]4,9998;5,0002[$.

Vérification : $u_{1666} \simeq 4,99979992$ et $u_{1667} \simeq 4,99980004$

Exercice 2B.7 *Justifier que la suite $(-1)^n$ n'a pas de limite.*

La suite $(-1)^n$ prend alternativement les valeurs 1 et -1 suivant que *n* est pair ou impair.

Donc cette suite ne peut avoir $+\infty$ ou $-\infty$ pour limite.

Supposons que la limite soit 1 : pour tout nombre *r*, si petit soit-il, il n'est pas possible de déterminer un rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite seraient dans l'intervalle $]1-r;1+r[$.

Par exemple, prenons $r = \frac{1}{2}$, ce qui donne l'intervalle $\left]\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right[$.

Certes tous les termes sont inférieurs à $\frac{3}{2}$.

Mais la condition $(-1)^n > \frac{1}{2}$ ne peut être réalisée car $(-1)^n$ vaut alternativement 1 et -1.

La suite $(-1)^n$ n'a pas de limite.