# Limites de suites géométriques

**Exercice 2C.1 :**

1) Calculer la somme $S=1+\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+...+\left(\frac{1}{2}\right)^8$.

2) Déterminer la limite de la suite $S_n=1+\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+...+\left(\frac{1}{2}\right)^n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$ ?

**Exercice 2C.2 :**

1) Calculer la somme $S=\frac{1}{5}+\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^3+...+\left(\frac{1}{5}\right)^{12}$.

2) Déterminer la limite de la suite $S_n=\frac{1}{5}+\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^3+...+\left(\frac{1}{5}\right)^n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$ ?

**Exercice 2C.3 :**

On considère la suite géométrique $(u_n)$ de premier terme $u_0=4$ et de raison $q=3$.

1) Calculer la somme de ses 15 premiers termes.
2) Calculer la somme $u_{13}+u_{14}+...+u_{27}$.
3) On définit la suite $(S_n)$ pour tout entier naturel $n$ par $S_n=u_0+u_1+...+u_n$
   Déterminer la limite de la suite $(S_n)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$ ?

## Exercice 2C.1 :

**1)** *Calculer la somme* $S = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^8$.

On reconnait la somme des termes d'une suite géométrique de premier terme 1, de raison égale à $\frac{1}{3}$

$$S = 1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^9}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^9}{\frac{2}{2} - \frac{1}{2}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^9}{\frac{1}{2}} = 2\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^9\right] \simeq 1,996.$$

**2)** *Déterminer la limite de la suite* $S_n = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$ *lorsque n tend vers* $+\infty$ *?*

Ainsi : $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 1 \times \dfrac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$.

$0 < \frac{1}{2} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$ et par somme et par produit : $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 2$.

**Autre méthode :**

$$S_n = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$2 \times S_n = 2 \times \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = 2 + 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2 \times S_n = 2 + S_n - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\Leftrightarrow \quad S_n = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Or $0 < \frac{1}{2} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 2$.

## Exercice 2C.2 :

**1)** *Calculer la somme* $S = \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{5}\right)^{12}$.

$$S = \frac{1}{5} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{12}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{1}{5} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{12}}{\frac{5}{5} - \frac{1}{5}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{12}}{\frac{4}{5}} = \frac{1}{5} \times \frac{5}{4}\left[1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{12}\right] \simeq 0,249999999$$

**2)** *Déterminer sa limite de la suite* $S_n = \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{5}\right)^n$ *lorsque n tend vers* $+\infty$ *?*

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{1}{4}\left[1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n\right]$$

$0 < \frac{1}{5} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$ et par somme et par produit : $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 0,25$.

**Autre méthode :**

$$S_n=\frac{1}{5}+\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1}{5}\right)^n$$

$$5\times S_n=5\times\left[\frac{1}{5}+\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1}{5}\right)^n\right]=1+\frac{1}{5}+\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow\ 5\times S_n=1+S_n-\left(\frac{1}{5}\right)^n$$

$$\Leftrightarrow\ 4\times S_n=1-\left(\frac{1}{5}\right)^n$$

$$\Leftrightarrow\ S_n=\frac{1}{4}\left[1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right].$$

Or $0<\frac{1}{5}<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{4}\left[1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right]=\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\frac{1}{4}$.

**Exercice 2C.3 :**

*On considère la suite géométrique $(u_n)$ de premier terme $u_0=4$ et de raison $q=3$.*

1) *Calculer la somme de ses 15 premiers termes.*

$$S_{14}=u_0+u_1+\ldots+u_{14}=u_0\times\frac{1-q^{nbtermes}}{1-q}=4\times\frac{1-3^{15}}{1-3}=4\times\frac{1-3^{15}}{-2}=-2\left(1-3^{15}\right)=2\left(3^{15}-1\right)$$

2) *Calculer la somme $u_{13}+u_{14}+\ldots+u_{27}$.*

**Deux méthodes :**

**a)** $u_{13}+u_{14}+\ldots+u_{27}=\left(u_0+u_1+\ldots+u_{27}\right)-\left(u_0+u_1+\ldots+u_{12}\right)=S_{27}-S_{12}$

$$=2\left(3^{28}-1\right)-2\left(3^{13}-1\right)=2\times3^{28}-2-2\times3^{13}+2=2\left(3^{28}-3^{13}\right)$$

**b)** $u_{13}+u_{14}+\ldots+u_{27}=u_{13}\times\dfrac{1-q^{nbtermes}}{1-q}$

$u_n=u_0\times q^n=4\times3^n$ donc $u_{13}=4\times3^{13}$. Ainsi :

$$u_{13}+u_{14}+\ldots+u_{27}=4\times3^{13}\times\frac{1-3^{27-13+1}}{1-3}=4\times3^{13}\times\frac{1-3^{15}}{-2}=-2\times3^{13}\left(1-3^{15}\right)=2\times3^{13}\left(3^{15}-1\right)$$

3) *On définit la suite $(S_n)$ pour tout entier naturel n par $S_n=u_0+u_1+\ldots+u_n$*

*Déterminer la limite de la suite $(S_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$ ?*

$$S_n=u_0+u_1+\ldots+u_n=4\times\frac{1-3^{n+1}}{1-3}=4\times\frac{1-3^{n+1}}{-2}=-2\left(1-3^{n+1}\right)=2\left(3^{n+1}-1\right)$$

Or $3>1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}3^{n+1}=+\infty$

Par somme et par produit : $\lim\limits_{n\to+\infty}2\left(3^{n+1}-1\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=+\infty$.