Limite d'une suite numérique

Exercice 3A.1 : Déterminer les limites des suites définies pour tout $n\in\mathbb{N}$ par les expressions suivantes :

$$u_n=n^2-1 \quad ; \quad v_n=\frac{-2}{n^2+1} \quad ; \quad w_n=\frac{1}{n^2}+5$$

Exercice 3A.2 : Déterminer les limites des suites définies pour tout $n\in\mathbb{N}$ par les expressions suivantes :

$$u_n=(n+1)(2-n) \quad ; \quad v_n=\left(\frac{1}{n}-2\right)\left(1-n^2\right)$$

Exercice 3A.3 : Déterminer les limites des suites définies pour tout $n\in\mathbb{N}$ par les expressions suivantes :

$$u_n=n^2-4n+7 \quad ; \quad v_n=2n^2-n+1$$

$$w_n=\frac{3n+2}{n+5} \quad ; \quad u_n=\frac{3n^2+8n+1}{2n^2+9}$$

Exercice 3A.4 : Déterminer les limites des suites suivantes :

$$u_n=\frac{3n^2+7n-2}{12n+4} \qquad v_n=\frac{-3n-5}{5n^2-2n+1} \qquad w_n=\frac{4n^2-9}{3n^2-8n+11}$$

Exercice 3A.5 :

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty}2^n \qquad \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n \qquad \lim_{n\to+\infty}1{,}01^n \qquad \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{47}{43}\right)^n \qquad \lim_{n\to+\infty}0{,}89^n$$

Exercice 3A.6 :

Calculer les limites des suites suivantes lorsqu'elles existent. Justifier votre réponse.

Pour tout entier n :

1) $u_n=\sqrt{2n+1}$
2) $u_n=\sqrt{n^2+2}-n$
3) $u_n=\sqrt{5n^2+2}-3n$
4) $u_n=10^n-8^n$
5) $u_n=3^{n+1}-14^n$
6) $u_n=\dfrac{1+4^n}{10-6^n}$
7) $u_n=\dfrac{7^n-2^n}{6^n+5^n}$
8) $u_n=\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n+2}\times\left(\dfrac{7}{4}\right)^{n-1}$

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. Quet

Exercice 3A.1 :

$u_n = n^2 - 1$: on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$

donc par soustraction : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$: (u_n) ne converge pas

$v_n = \dfrac{-2}{n^2+1}$: on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 + 1 = +\infty$

donc par quotient : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$: (v_n) converge vers 0

$w_n = \dfrac{1}{n^2} + 5$: on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$

donc par somme : $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 5$: (w_n) converge vers 5

Exercice 3A.2 : *Déterminer les limites des suites définies pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *par les expressions suivantes :*

$u_n = (n+1)(2-n)$: on a $\lim\limits_{n \to +\infty} n+1 = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 2-n = -\infty$

donc par produit : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

$v_n = \left(\dfrac{1}{n} - 2\right)(1-n^2)$: on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} - 2 = -2$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 1-n^2 = -\infty$

donc par produit : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

Exercice 3A.3 Calculer les limites des suites suivantes lorsqu'elles existent. Justifier votre réponse.

Pour tout entier n :

1) $u_n = n^2 - 4n + 7$ → $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} -4n+7 = -\infty$: nous avons une Forme Indéterminée F.I.

Factorisons : $u_n = n^2 - 4n + 7 = n^2\left(1 - \dfrac{4n}{n^2} + \dfrac{7}{n^2}\right) = n^2\left(1 - \dfrac{4}{n} + \dfrac{7}{n^2}\right)$

Ainsi : $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$, d'autre part $\lim\limits_{n \to +\infty} -\dfrac{4}{n} = 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{7}{n^2} = 0$ donc par somme : $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - \dfrac{4n}{n^2} + \dfrac{7}{n^2} = 1$

Ainsi par produit : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

2) $v_n = 2n^2 - n + 1$ → $\lim\limits_{n \to +\infty} 2n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} -n+1 = -\infty$: nous avons une Forme Indéterminée F.I.

Factorisons : $v_n = 2n^2 - n + 1 = n^2\left(2 - \dfrac{n}{n^2} + \dfrac{1}{n^2}\right) = n^2\left(2 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right)$

Ainsi : $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$, d'autre part $\lim\limits_{n \to +\infty} -\dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$ donc par somme : $\lim\limits_{n \to +\infty} 2 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} = 2$

Ainsi par produit : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

3) $w_n = \dfrac{3n+2}{n+5}$ on a : $\dfrac{3n+2}{n+5} = \dfrac{n\left(3 + \dfrac{2}{n}\right)}{n\left(1 + \dfrac{5}{n}\right)} = \dfrac{3 + \dfrac{2}{n}}{1 + \dfrac{5}{n}}$ or : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2}{n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{5}{n} = 0$

d'où par somme : $\lim\limits_{n \to +\infty} 3 + \dfrac{2}{n} = 3$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \dfrac{5}{n} = 1$

par quotient : $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \dfrac{3}{1} = 3$: (Y_n) converge vers 3.

4) $u_n = \dfrac{3n^2+8n+1}{2n^2+9}$ → $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n^2+8n+1=+\infty$ (termes positifs) et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n^2+9=+\infty$: nous avons une F.I.

Factorisons : $u_n = \dfrac{\boxed{n^2}\left(3+\dfrac{8n}{n^2}+\dfrac{1}{n^2}\right)}{\boxed{n^2}\left(2+\dfrac{9}{n^2}\right)} = \dfrac{3+\dfrac{8}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{2+\dfrac{9}{n^2}}$

Au numérateur : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{8}{n}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$ donc par somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} 3+\dfrac{8}{n}+\dfrac{1}{n^2}=3$

Au dénominateur : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{9}{n^2}=0$ donc par somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} 2+\dfrac{9}{n^2}=2$

Par quotient : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\dfrac{3}{2}$

Exercice 3A.4 : *Déterminer les limites des suites suivantes :*

$$u_n=\frac{3n^2+7n-2}{12n+4}=\frac{n^2\left(\dfrac{3n^2}{n^2}+\dfrac{7n}{n^2}-\dfrac{2}{n^2}\right)}{n\left(\dfrac{12n}{n}+\dfrac{4}{n}\right)}=\frac{n^2\left(3+\dfrac{7}{n}-\dfrac{2}{n^2}\right)}{n\left(12+\dfrac{4}{n}\right)}=\frac{n\left(3+\dfrac{7}{n}-\dfrac{2}{n^2}\right)}{12+\dfrac{4}{n}}$$

Or : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2}{n^2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{4}{n}=0$

Donc par somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} 3+\dfrac{7}{n}-\dfrac{2}{n^2}=3$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 12+\dfrac{4}{n}=12$

Par produit : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(3+\dfrac{7}{n}-\dfrac{2}{n^2}\right)=+\infty$ et par quotient : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$

$$v_n=\frac{-3n-5}{5n^2-2n+1}=\frac{n\left(\dfrac{-3n}{n}-\dfrac{5}{n}\right)}{n^2\left(\dfrac{5n^2}{n^2}-\dfrac{2n}{n^2}+\dfrac{1}{n^2}\right)}=\frac{n\left(-3-\dfrac{5}{n}\right)}{n^2\left(5-\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)}=\frac{-3-\dfrac{5}{n}}{n\left(5-\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)}$$

Or : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{5}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$

Donc par somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} -3-\dfrac{5}{n}=-3$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 5-\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}=5$

Par produit : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(5-\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)=+\infty$ et par quotient : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$

$$w_n=\frac{4n^2-9}{3n^2-8n+11}=\frac{n^2\left(\dfrac{4n^2}{n^2}-\dfrac{9}{n^2}\right)}{n^2\left(\dfrac{3n^2}{n^2}-\dfrac{8n}{n^2}+\dfrac{11}{n^2}\right)}=\frac{4-\dfrac{9}{n^2}}{3-\dfrac{8}{n}+\dfrac{11}{n^2}}$$

Or : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{9}{n^2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{8}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{11}{n^2}=0$

Donc par somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} 4-\dfrac{9}{n^2}=4$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 3-\dfrac{8}{n}+\dfrac{11}{n^2}=3$, et par quotient : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n=\dfrac{4}{3}$

Exercice 3A.5 : *Déterminer les limites suivantes :*

$\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ $\qquad$ $\dfrac{3}{5} \in \left]-1;1\right[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3}{5}\right)^n = 0$ $\qquad$ $1,01 > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1,01^n$

$\dfrac{47}{43} > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{47}{43}\right)^n = +\infty$ $\qquad$ $0,89 \in \left]-1;1\right[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,89^n = 0$

Exercice 3A.6 :

Calculer les limites des suites suivantes lorsqu'elles existent. Justifier votre réponse.

Pour tout entier n :

1) $u_n = \sqrt{2n+1}$

On pose $X = 2n+1$ donc $n = \dfrac{X-1}{2}$: si n tend vers $+\infty$, alors X tend aussi vers $+\infty$.

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{2n+1} = \lim_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty .$$

2) $u_n = \sqrt{n^2+2} - n$

→ $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2+2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+2} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -n = -\infty$: nous avons une F.I.

Multiplions par la quantité conjuguée :

$$u_n = \sqrt{n^2+2} - n = \left(\sqrt{n^2+2} - n\right) \times \frac{\sqrt{n^2+2}+n}{\sqrt{n^2+2}+n} = \frac{\left(\sqrt{n^2+2}-n\right)\left(\sqrt{n^2+2}+n\right)}{\sqrt{n^2+2}+n} = \frac{\left(\sqrt{n^2+2}\right)^2 - n^2}{\sqrt{n^2+2}+n}$$

$$= \frac{n^2+2-n^2}{\sqrt{n^2+2}+n} = \frac{2}{\sqrt{n^2+2}+n}$$

Le numérateur a pour limite 2.

Au dénominateur : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2+2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+2} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$

Par somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+2} + n = +\infty$ et par quotient : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

L'autre méthode par factorisation ne marche pas ici :

$$u_n = \sqrt{n^2\left(1+\frac{2}{n^2}\right)} - n = \sqrt{n^2} \times \sqrt{1+\frac{2}{n^2}} - n = n \times \sqrt{1+\frac{2}{n^2}} - n \times 1 = n \times \left(\sqrt{1+\frac{2}{n^2}} - 1\right)$$

→CETTE METHODE NE MARCHE PAS car nous avons une nouvelle F.I. "$0\times\infty$".

3) $u_n = \sqrt{5n^2+2} - 3n = \left(\sqrt{5n^2+2} - 3n\right) \times \dfrac{\sqrt{5n^2+2}+3n}{\sqrt{5n^2+2}+3n} = \dfrac{5n^2+2-9n^2}{\sqrt{5n^2+2}+3n} = \dfrac{2-4n^2}{\sqrt{5n^2+2}+3n}$

→CETTE METHODE NE MARCHE PAS car nous avons une nouvelle F.I. "$\dfrac{\infty}{\infty}$".

Factorisons :

$$u_n = \sqrt{5n^2+2} - 3n = \sqrt{n^2\left(5+\frac{2}{n^2}\right)} - 3n = |n| \times \sqrt{5+\frac{2}{n^2}} - 3n = n \times \sqrt{5+\frac{2}{n^2}} - 3n$$

$$= n \times \left(\sqrt{5+\frac{2}{n^2}} - 3\right)$$

Or : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n^2} = 0$ donc par somme et composition : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{5+\dfrac{2}{n^2}} = \sqrt{5}$

Et par somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{5+\frac{2}{n^2}}-3=\sqrt{5}-3 \ <0$

Ainsi par produit : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} n\times\left(\sqrt{5+\frac{2}{n^2}}-3\right)=-\infty$

4) $u_n = 10^n - 8^n = 10^n\left(1-\frac{8^n}{10^n}\right)=10^n\left(1-\left(\frac{8}{10}\right)^n\right)=10^n\left(1-0,8^n\right)$

$0<0,8<1$ donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,8^n=0$ et par somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-0,8^n=1$

$10>1$ donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} 10^n=+\infty$ et par produit des limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$

5) $u_n = 3^{n+1}-14^n = 3\times 3^n-14^n = 3^n\left(3-\frac{14^n}{3^n}\right)=3^n\left(3-\left(\frac{14}{3}\right)^n\right)$

$3>1$ et $\frac{14}{3}>1$ donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{14}{3}\right)^n=+\infty$

Par somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} 3-\left(\frac{14}{3}\right)^n=-\infty$ et par produit des limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$

6) $u_n = \frac{1+4^n}{10-6^n}=\frac{4^n\left(\frac{1}{4^n}+1\right)}{6^n\left(\frac{10}{6^n}-1\right)}=\left(\frac{4}{6}\right)^n\times\frac{\frac{1}{4^n}+1}{\frac{10}{6^n}-1}=\left(\frac{2}{3}\right)^n\times\frac{\frac{1}{4^n}+1}{\frac{10}{6^n}-1}$

$0<\frac{2}{3}<1$ donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$

$4>1$ et $6>1$ donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} 4^n = \lim\limits_{n\to+\infty} 6^n=+\infty$

Par somme et quotient : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{4^n}+1}{\frac{10}{6^n}-1}=\frac{1}{-1}=-1$

Par produit des limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$

7) $u_n = \frac{7^n-2^n}{6^n+5^n}=\frac{7^n\left(1-\frac{2^n}{7^n}\right)}{6^n\left(1+\frac{5^n}{6^n}\right)}=\left(\frac{7}{6}\right)^n\times\frac{1-\left(\frac{2}{7}\right)^n}{1+\left(\frac{5}{6}\right)^n}$

$\frac{7}{6}>1$ donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{7}{6}\right)^n=+\infty$

$0<\frac{2}{7}<1$ et $0<\frac{5}{6}<1$ donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{7}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n=0$

Par somme et par quotient : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1-\left(\frac{2}{7}\right)^n}{1+\left(\frac{5}{6}\right)^n}=\frac{1}{1}=1$

Par produit des limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$

8) $u_n = \left(\frac{3}{5}\right)^{n+2} \times \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1} = \left(\frac{3}{5}\right)^{n} \times \left(\frac{3}{5}\right)^{2} \times \left(\frac{7}{4}\right)^{n} \times \left(\frac{7}{4}\right)^{-1} = \left(\frac{3}{5}\right)^{n} \times \frac{9}{25} \times \left(\frac{7}{4}\right)^{n} \times \frac{4}{7}$

$= \left(\frac{3}{5} \times \frac{7}{4}\right)^{n} \times \frac{9 \times 4}{25 \times 7} = \left(\frac{21}{20}\right)^{n} \times \frac{36}{175}$

$\frac{21}{20} > 1$ donc : $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{21}{20}\right)^{n} = +\infty$

Par produit des limites : $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$