Propriétés des limites de suites numériques

Exercice 4A.1

Calculer les limites des suites suivantes lorsqu'elles existent. Justifier votre réponse.
Pour tout entier n :

1) $u_n = \dfrac{\sin n}{n}$ 2) $u_n = \dfrac{5 - 4\sin\left(4n^2\right)}{2\sqrt{n}}$

Exercice 4A.2

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = n\sqrt{n} - 8n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1) En écrivant u_n sous la forme $u_n = n\left(\sqrt{n} - 8\right)$, déterminer un entier n_0 tel que $u_n > n$ pour tout $n \geq n_0$
2) En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 4A.3

On considère la suite (u_n) définie pour $n \geq 1$ par $u_n = \dfrac{n+1}{2n + \sin n}$.

1) En utilisant un tableur, conjecturer la limite de la suite (u_n).
2) Démontrer que pour tout $n \geq 1$, on a $\dfrac{1}{2} < u_n$. (On dit que la suite (u_n) est minorée par $\dfrac{1}{2}$).
3) Démontrer qu'à partir d'un certain rang, on a $u_n < \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n}$.
4) Justifier que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 4A.4

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n + 2$.

1) Démontrer par récurrence que :
   a. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $8 \leq u_n$.
   b. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$.
2) En déduire que la suite (u_n) converge

Exercice 4A.1 *Calculer les limites des suites suivantes lorsqu'elles existent. Justifier votre réponse.*
Pour tout entier n :

1) $u_n = \dfrac{\sin n}{n}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $-1 \le \sin n \le 1$ d'où : $\dfrac{-1}{n} \le \dfrac{\sin n}{n} \le \dfrac{1}{n}$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n \to +\infty} -\dfrac{1}{n} = 0$ donc d'après le théorème d'encadrement ou des gendarmes :

(u_n) **converge et** $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

2) $u_n = \dfrac{5 - 4\sin\left(4n^2\right)}{2\sqrt{n}}$

Pour tout réel x : $-1 \le \sin x \le 1$ donc pour tout entier naturel n :

$$-1 \le \sin\left(4n^2\right) \le 1$$

$$\Leftrightarrow \; -1 \times (-4) \ge -4\sin\left(4n^2\right) \ge 1 \times (-4)$$

$$\Leftrightarrow \; 4 \ge -4\sin\left(4n^2\right) \ge -4$$

$$\Leftrightarrow \; 9 \ge 5 - 4\sin\left(4n^2\right) \ge 1$$

$$\Leftrightarrow \; \frac{9}{2\sqrt{n}} \ge \frac{5 - 4\sin\left(4n^2\right)}{2\sqrt{n}} \ge \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

$$\Leftrightarrow \; \frac{1}{2\sqrt{n}} \le \frac{5 - 4\sin\left(4n^2\right)}{2\sqrt{n}} \le \frac{9}{2\sqrt{n}}$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{2\sqrt{n}} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{9}{2\sqrt{n}} = 0$: ces deux suites convergentes ont la même limite 0.

D'après le théorème d'encadrement ou des gendarmes : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

Exercice 4A.2

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = n\sqrt{n} - 8n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1) *En écrivant u_n sous la forme $u_n = n\left(\sqrt{n} - 8\right)$, déterminer un entier n_0 tel que $u_n > n$ pour tout $n \ge n_0$*

$$u_n > n \quad \Leftrightarrow \quad n\left(\sqrt{n} - 8\right) > n \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{n} - 8 > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{n} > 9 \quad \Leftrightarrow \quad n > 81$$

(car la fonction carrée est une fonction croissante sur $[0;+\infty[$.

Ainsi pour tout $n \ge 82$: $u_n > n$

2) *En déduire la limite de la suite (u_n).*

$\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$

Or pour tout $n \ge 82$: $n < u_n$

Donc par croissances comparées : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Exercice 4A.3

On considère la suite (u_n) définie pour $n \ge 1$ par $u_n = \dfrac{n+1}{2n + \sin n}$.

1) *En utilisant un tableur, conjecturer la limite de la suite (u_n).*

Par lecture du tableur ci-contre, la suite semble converger vers la valeur $\frac{1}{2}$.

	A	B
1	rang	suite (Un)
2	1	0,703860786
3	2	0,611085404
4	3	0,651346985
5	4	0,690302866
6	5	0,663637844
7	6	0,597239839
8	7	0,545814786
9	8	0,529743376
10	9	0,543120554
11	10	0,565378903
12	11	0,571428305
13	12	0,55405376
14	13	0,529898239
15	14	0,51740896
16	15	0,522017936
17	16	0,536073038
18	17	0,544817233
19	18	0,539022189
20	19	0,524248083
21	20	0,513284973
22	21	0,513578842
23	22	0,522832449
24	23	0,531516967
25	24	0,530848434
26	25	0,521380111
27	26	0,511726512
28	27	0,509495023
29	28	0,515364016
30	29	0,523228137
31	30	0,525317166

	A	B
71	70	0,504354889
72	71	0,503668897
73	72	0,506052445
74	73	0,509209718
75	74	0,510152533
76	75	0,507979902
77	76	0,504699249
78	77	0,503227364
79	78	0,504747249
80	79	0,507756336
81	80	0,509414382
82	81	0,508148622
83	82	0,505132792
84	83	0,503089314
85	84	0,503753884
86	85	0,506406858
87	86	0,5085443
88	87	0,508147152
89	88	0,505580133
90	89	0,503186655
91	90	0,503057048
92	91	0,505200303
93	92	0,507585029
94	93	0,507966103
95	94	0,505979215
96	95	0,503452685
97	96	0,502633416
98	97	0,504168113
99	98	0,506584011
100	99	0,507612169
101	100	0,506281819

2) *Démontrer que pour tout $n \geq 1$, on a $\frac{1}{2} < u_n$.*

(On dit que la suite (u_n) est minorée par $\frac{1}{2}$).

On remarque que

$$-1 \leq \sin n \leq 1 \text{ et } 2(n+1) = 2n+2$$

Ainsi : $-1 \leq \sin n \leq 1$

$$\Leftrightarrow 2n-1 \leq 2n+\sin n \leq 2n+1$$

$$\Leftrightarrow 2n-2 \leq 2n-1 \leq 2n+\sin n \leq 2n+1 \leq 2n+2$$

$$\Leftrightarrow 2n-2 \leq 2n+\sin n \leq 2n+2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2n-2} \geq \frac{1}{2n+\sin n} \geq \frac{1}{2n+2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n+1}{2n-2} \geq \frac{n+1}{2n+\sin n} \geq \frac{n+1}{2n+2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n+1}{2n-2} \geq u_n \geq \frac{1}{2}$$

La suite (u_n) est minorée par $\frac{1}{2}$.

AUTRE METHODE :

$$u_n - \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2n+\sin n} - \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2n+\sin n} \times \frac{2}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{2n+\sin n}{2n+\sin n} = \frac{2(n+1)-(2n+\sin n)}{2n+\sin n} = \frac{2-\sin n}{2n+\sin n}$$

Or $\quad -1 \leq \sin n \leq 1 \Leftrightarrow 1 \geq -\sin n \geq -1 \Leftrightarrow 2+1 \geq 2-\sin n \geq 2-1 \Leftrightarrow 3 \geq 2-\sin n \geq 1$

→le numérateur est positif

$$-1 \leq \sin n \leq 1 \Leftrightarrow 2n-1 \leq 2n+\sin n \leq 2n+1$$

→ $n \geq 1$ donc $2n-1 > 0$ et le dénominateur est strictement positif.

Ainsi : $\quad u_n - \frac{1}{2} > 0 \Leftrightarrow u_n > \frac{1}{2}$.

3) *Démontrer qu'à partir d'un certain rang, on a $u_n < \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \Leftrightarrow u_n < \frac{n+2}{2n}$.*

$$u_n \leq \frac{n+1}{2n-2} \Leftrightarrow u_n \leq \frac{n-1+2}{2n-2} \Leftrightarrow u_n \leq \frac{n-1}{2n-2} + \frac{2}{2n-2} \Leftrightarrow u_n \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n-1} \Leftrightarrow u_n \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$$

$$-1 \leq \sin n \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 2n-1 \leq 2n+\sin n \leq 2n+1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2n-1} \geq \frac{1}{2n+\sin n} \geq \frac{1}{2n+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n+1}{2n-1} \geq \frac{n+1}{2n+\sin n} \geq \frac{n+1}{2n+1} \Leftrightarrow \frac{n+1}{2n-1} \geq u_n \geq \frac{1}{2}.$$

Etude de $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right) - \frac{n+1}{2n-1} = \frac{n+2}{2n} - \frac{n+1}{2n-1} = \frac{(n+2)(2n-1)}{2n(2n-1)} - \frac{(n+1)\times 2n}{2n-1}$

$$= \frac{2n^2 - n + 4n - 2}{2n(2n-1)} - \frac{2n^2+2n}{2n-1}$$

$$= \frac{2n^2 - n + 4n - 2 - 2n^2 - 2n}{2n(2n-1)}$$

$$= \frac{n-2}{2n(2n-1)}$$

Pour $n > 2$: $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right) - \frac{n+1}{2n-1} > 0$

Donc $\frac{n+1}{2n-1} < \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$ soit : $u_n < \frac{n+1}{2n-1} < \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$.

4) *Justifier que* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{2}$.

De ce qui précède, on obtient : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$

D'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{2}$.

Exercice 4A.4

Soit la suite (u_n) *définie sur* $\mathbb{N}$ *par* $u_0 = 12$ *et* $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 2$.

1) *Démontrer par récurrence que :*

a. *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $8 \leq u_n$.

Initialisation : $u_0 = 12$ donc : $u_0 \geq 8$.

Hérédité : Supposons qu'il existe un rang n tel que $u_n \geq 8$, cela implique-t-il $u_{n+1} \geq 8$?

Par hypothèse :

$$u_n \geq 8$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}u_n \geq 8 \times \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}u_n + 2 \geq 6 + 2$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} \geq 8$$

L'hérédité est vérifiée.

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 8$

b. *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$.

Initialisation : $u_1 = \frac{3}{4}u_0 + 2 = \frac{3}{4} \times 12 + 2 = 11$ donc : $u_1 \leq u_0$.

Hérédité : Supposons qu'il existe un rang n tel que $u_{n+1} \leq u_n$, cela implique-t-il $u_{n+2} \leq u_{n+1}$?

Par hypothèse :

$$u_{n+1} \leq u_n$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}u_{n+1} \leq \frac{3}{4}u_n$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}u_{n+1} + 2 \leq \frac{3}{4}u_n + 2$$

$$\Leftrightarrow u_{n+2} \leq u_{n+1}$$

L'hérédité est vérifiée.

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$.

2) *En déduire que la suite (u_n) converge.*

La suite (u_n) est décroissante et minorée par 8 : elle converge.