Exercice 4B.1

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par $u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$.

1) Justifier que la suite (u_n) est croissante.
2) En admettant que pour tout entier $k \geq 1$: $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}$, justifier que la suite est majorée.
3) Que peut-on dire de la suite (u_n) ?

Exercice 4B.2 Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$

1) En remarquant que pour tout entier k vérifiant $1 \leq k \leq n$ on a $\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$, montrer que $u_n \geq \sqrt{n}$.
2) Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 4B.3

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = \frac{1}{n+\sqrt{1}} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{n+\sqrt{n}}$

1) Montrer que, pour tout entier i avec $1 \leq i \leq n$, on a :
$$\frac{1}{n+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n+\sqrt{i}} \leq \frac{1}{n+1}$$
2) En déduire que la suite converge et calculer sa limite.

Exercice 4B.4

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = \frac{1}{n+\sqrt{1}} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{n+\sqrt{n}}$

1) Calculer les termes u_1, u_2 et u_3 (valeur approchée à 10^{-3} près).
2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{n}{n+\sqrt{n}} \leq u_n \leq \frac{n}{n+1}$.
3) En déduire que la suite converge et calculer sa limite.

Exercice 4B.5 Limite d'une somme

Soit v la suite définie pour tout entier $n \geq 1$ par : $v_n = \frac{1}{\sqrt{2n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{2n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2n^2+n}}$

Démontrer que cette suite converge et déterminer sa limite.

Exercice 4B.6 Montrer que $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 2$.

Exercice 4B.7 Montrer que $\frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \frac{1}{1+2+3+4+5} + \ldots = 1$

Exercice 4B.8 Calculer $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} \ldots$

Exercice 4B.9 Montrer que la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$ est bornée par l'intervalle $\left[\frac{1}{2};1\right]$.

Exercice 4B.1

On considère la suite (u_n) *définie pour tout entier* $n \geq 1$ *par* $u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2}$.

1) *Justifier que la suite* (u_n) *est croissante.*

2) *En admettant que pour tout entier* $k \geq 1$: $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}$, *justifier que la suite est majorée.*

3) *Que peut-on dire de la suite* (u_n) *?*

1) Pour tout entier $n \geq 1$ par $u_{n+1} - u_n = \left(1 + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}\right) - \left(1 + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{(n+1)^2}$

Donc $u_{n+1} - u_n > 0 \iff u_{n+1} > u_n$: la suite (u_n) est croissante.

2) Pour tout entier $k \geq 1$: $k - 1 < k \iff k(k-1) < k^2 \iff \frac{1}{k(k-1)} > \frac{1}{k^2}$

Ainsi : $\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1 \times 2}$, $\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2 \times 3}$, ... , $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1) \times n}$

Donc $u_n < 1 + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{(n-1) \times n}$

Or pour tout entier $k \geq 1$: $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}$, donc :

$$u_n < 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

$$\iff u_n < 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{n}$$

$$\iff u_n < 2 - \frac{1}{n} < 2$$

La suite (u_n) est majorée par 2.

3) La suite (u_n) est croissante et majorée : elle converge.

Exercice 4B.2

Soit la suite (u_n) *définie sur* $\mathbb{N}^*$ *par :* $u_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}}$

1) *En remarquant que pour tout entier k vérifiant* $1 \leq k \leq n$ *on a* $\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$, *montrer que* $u_n \geq \sqrt{n}$.

2) *Déterminer la limite de la suite* (u_n).

1) La fonction racine carrée est croissante, donc : $k \leq n \iff \sqrt{k} \leq \sqrt{n} \iff \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Ainsi : $u_n \geq \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} \iff u_n \geq \frac{n}{\sqrt{n}} \iff u_n \geq \sqrt{n}$.

2) $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ donc par croissance comparée : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Exercice 4B.3

Soit la suite (u_n) *définie sur* $\mathbb{N}^*$ *par :* $u_n = \dfrac{1}{n+\sqrt{1}} + \dfrac{1}{n+\sqrt{2}} + \ldots + \dfrac{1}{n+\sqrt{n}}$

1) *Montrer que, pour tout entier i avec* $1 \le i \le n$, *on a :*

$$\frac{1}{n+\sqrt{n}} \le \frac{1}{n+\sqrt{i}} \le \frac{1}{n+1}$$

2) *En déduire que la suite converge et calculer sa limite.*

1) Pour tout entier i avec $1 \le i \le n$, on a, la fonction racine carrée étant croissante :

$$1 \le i \le n \iff \sqrt{1} \le \sqrt{i} \le \sqrt{n} \iff n+\sqrt{1} \le n+\sqrt{i} \le n+\sqrt{n} \iff \frac{1}{n+\sqrt{1}} \ge \frac{1}{n+\sqrt{i}} \ge \frac{1}{n+\sqrt{n}}$$

Ainsi pour tout $i \ge 1$: $\dfrac{1}{n+\sqrt{i}} \le \dfrac{1}{n+1}$ donc :

$$u_n \le \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+1} \iff u_n \le \frac{n}{n+1} < 1$$: la suite (u_n) est majorée par 1.

Ainsi : $$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{1}{n+\sqrt{1}} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{n+\sqrt{n}} + \frac{1}{n+1+\sqrt{n+1}}\right) - \left(\frac{1}{n+\sqrt{1}} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{n+\sqrt{n}}\right)$$

$$= \frac{1}{n+1+\sqrt{n+1}}$$

Donc $u_{n+1} - u_n > 0 \iff u_{n+1} > u_n$: la suite (u_n) est croissante.

La suite (u_n) est croissante et majorée : elle converge.

2) Pour tout entier i tel que $1 \le i \le n$, la relation : $\dfrac{1}{n+\sqrt{n}} \le \dfrac{1}{n+\sqrt{i}} \le \dfrac{1}{n+1}$ donne

$$n \times \frac{1}{n+\sqrt{n}} \le u_n \le n \times \frac{1}{n+1} \iff \frac{n}{n+\sqrt{n}} \le u_n \le \frac{n}{n+1}$$

$$\frac{n}{n+\sqrt{n}} = \frac{n \times 1}{n\left(1+\frac{\sqrt{n}}{n}\right)} = \frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}$$ or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{1}{\sqrt{n}} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1$

$$\frac{n}{n+1} = \frac{n \times 1}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$$ or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{1}{n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$

Par encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

Exercice 4B.4

Soit la suite (u_n) *définie sur* $\mathbb{N}^*$ *par :* $u_n = \dfrac{1}{n+\sqrt{1}} + \dfrac{1}{n+\sqrt{2}} + \ldots + \dfrac{1}{n+\sqrt{n}}$

1) *Calculer les termes* u_1, u_2 *et* u_3 *(valeur approchée à* 10^{-3} *près).*

2) *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{n}{n+\sqrt{n}} \le u_n \le \dfrac{n}{n+1}$.

3) *En déduire que la suite converge et calculer sa limite.*

1) $u_1 = \dfrac{1}{1+\sqrt{1}} = \dfrac{1}{2}$

$$u_2=\frac{1}{2+\sqrt{1}}+\frac{1}{2+\sqrt{2}}=\frac{1}{3}+\frac{1}{2+\sqrt{2}}=\frac{2+\sqrt{2}+3}{3\left(2+\sqrt{2}\right)}=\frac{5+\sqrt{2}}{3\left(2+\sqrt{2}\right)}\times\frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$$

$$=\frac{10-5\sqrt{2}+2\sqrt{2}-2}{3(4-2)}=\frac{8-3\sqrt{2}}{6}\simeq 0,626$$

$$u_3=\frac{1}{3+\sqrt{1}}+\frac{1}{3+\sqrt{2}}+\frac{1}{3+\sqrt{3}}\simeq 0,688$$

2) $n\geq 1$ donc pour tout entier naturel i : $\dfrac{1}{n+\sqrt{i}}>0$ et $u_n\geq\dfrac{n}{n+\sqrt{n}}$.

$n\geq 1$ donc pour tout entier naturel $i\geq 1$:

$$\sqrt{i}\geq\sqrt{1}$$

$$\Leftrightarrow\ n+\sqrt{i}\geq n+\sqrt{1}$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{1}{n+\sqrt{i}}\leq\frac{1}{n+1}$$

Ainsi :

$$\frac{1}{n+\sqrt{1}}+\frac{1}{n+\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{n+\sqrt{n}}\leq\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{n+1}$$

$$\Leftrightarrow\ u_n\leq\frac{n}{n+1}.$$

On obtient :

$$\frac{n}{n+\sqrt{n}}\leq u_n\leq\frac{n}{n+1}$$

3)

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+\sqrt{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n\left(1+\frac{\sqrt{n}}{n}\right)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}=1$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=1$$

Par encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$

Exercice 4B.5 Limite d'une somme

Soit v la suite définie pour tout entier $n\geq 1$ par :

$$v_n=\frac{1}{\sqrt{2n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{2n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2n^2+n}}$$

Démontrer que cette suite converge et déterminer sa limite.

Pour tout $p\in\{1;2;\ldots;n\}$ on a :

$$\frac{1}{\sqrt{2n^2+1}}\geq\frac{1}{\sqrt{2n^2+2}}\geq\ldots\geq\frac{1}{\sqrt{2n^2+n}}$$

Ainsi pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $\dfrac{1}{\sqrt{2n^2+n}}\leq\dfrac{1}{\sqrt{2n^2+2}}\leq\ldots\leq\dfrac{1}{\sqrt{2n^2+1}}$

D'où : $n\times\frac{1}{\sqrt{2n^2+n}}\le v_n\le n\times\frac{1}{\sqrt{2n^2+1}}$ soit $\frac{n}{\sqrt{2n^2+n}}\le v_n\le\frac{n}{\sqrt{2n^2+1}}$

Or : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{2n^2+n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n^2}}{\sqrt{2n^2+n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{n^2}{2n^2+n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{n^2}{n^2\left(2+\frac{1}{n}\right)}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{2+\frac{1}{n}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{2n^2+1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n^2}}{\sqrt{2n^2+1}}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{n^2}{2n^2+1}}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{n^2}{n^2\left(2+\frac{1}{n^2}\right)}}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{2+\frac{1}{n^2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, on en déduit que : $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\frac{1}{\sqrt{2}}$

Exercice 4B.6 *Montrer que* $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=2$ *(somme des termes d'une suite géométrique)*

On définit la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0=1$$

$$u_1=1+\frac{1}{2}=\frac{2}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}=\frac{4-1}{2^1}=\frac{2^2-1}{2^1}$$

$$u_2=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{2}+\frac{1}{4}=\frac{6}{4}+\frac{1}{4}=\frac{7}{4}=\frac{8-1}{4}=\frac{2^3-1}{2^2}$$

$$u_3=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{4}+\frac{1}{8}=\frac{14}{8}+\frac{1}{8}=\frac{15}{8}=\frac{16-1}{8}=\frac{2^4-1}{2^3}$$

On peut alors supposer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de la forme : $u_n=\frac{2^{n+1}-1}{2^n}$.

Démonstration par récurrence :

Initialisation : $\frac{2^{0+1}-1}{2^0}=\frac{2-1}{1}=1=u_0$: l'initialisation est vérifiée

Hérédité : supposons qu'il existe un entier naturel n tel que $u_n=\frac{2^{n+1}-1}{2^n}$

→est-ce que $u_{n+1}=\frac{2^{n+2}-1}{2^{n+1}}$?

Par hypothèse : $u_n=\frac{2^{n+1}-1}{2^n}$

Donc $u_{n+1}=u_n+\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{2^{n+1}-1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{\left(2^{n+1}-1\right)\times2}{2^n\times2}+\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{2^{n+2}-2}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{2^{n+2}-1}{2^{n+1}}$

L'hérédité est vérifiée.

Par récurrence, pour tout entier naturel n, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de la forme : $u_n=\frac{2^{n+1}-1}{2^n}$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2^{n+1}-1}{2^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2^{n+1}}{2^n}-\frac{1}{2^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}2-\frac{1}{2^n}=2$.

Ainsi : $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=2$

Exercice 4B.7 *Calculer* $\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\dfrac{1}{1+2+3+4}+\dfrac{1}{1+2+3+4+5}+\dots$

On définit la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_1=\frac{1}{1+2}=\frac{1}{3}\ ,$$

$$u_2=\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}\ ,$$

$$u_3=\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{10}=\frac{5}{10}+\frac{1}{10}=\frac{6}{10}\ ,$$

$$u_4=\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\frac{1}{1+2+3+4+5}=\frac{3}{5}+\frac{1}{15}=\frac{9}{15}+\frac{1}{15}=\frac{10}{15}$$

Or : $\quad 1+2+3+4+5+\dots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

On reconnait la succession des termes d'addition des entiers :

Donc : $\quad u_1=\dfrac{1}{3}=1\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1\times 2}{2}\times\dfrac{2}{2\times 3}=\dfrac{1\times 2}{2\times 3}=\dfrac{1}{3}$

$$u_2=\frac{3}{6}=3\times\frac{1}{6}=\frac{2\times 3}{2}\times\frac{2}{3\times 4}=\frac{2\times 3}{3\times 4}=\frac{2}{4}$$

$$u_3=\frac{6}{10}=6\times\frac{1}{10}=\frac{3\times 4}{2}\times\frac{2}{4\times 5}=\frac{3\times 4}{4\times 5}=\frac{3}{5}$$

Et on pose : $u_n=\dfrac{n}{n+2}$

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n=\dfrac{n}{n+2}$.

Initialisation : $u_1=\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{1+2}$: l'initialisation est vérifiée

Hérédité : supposons qu'il existe un entier naturel n tel que $u_n=\dfrac{n}{n+2}$ $\quad\rightarrow$est-ce que $u_{n+1}=\dfrac{n+1}{n+3}$?

Par hypothèse : $u_n=\dfrac{n}{n+2}$

$$u_{n+1}=\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\frac{1}{1+2+3+4+5}+\dots+\frac{1}{1+2+3+4+5+\dots+(n+1)+(n+2)}$$

$$u_{n+1}=u_n+\frac{1}{1+2+3+4+5+\dots+(n+1)+(n+2)}=\frac{n}{n+2}+\frac{2}{(n+2)(n+3)}$$

$$=\frac{n(n+3)}{(n+2)(n+3)}+\frac{2}{(n+2)(n+3)}=\frac{n^2+3n+2}{(n+2)(n+3)}=\frac{(n+1)(n+2)}{(n+2)(n+3)}=\frac{n+1}{n+3}$$

L'hérédité est vérifiée.

Par récurrence, pour tout entier naturel n, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de la forme : $u_n=\dfrac{n}{n+2}$.

Ainsi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{2}{n}}=1.$

Donc : $\quad\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\dfrac{1}{1+2+3+4}+\dfrac{1}{1+2+3+4+5}+\dots=1$

Exercice 4B.8

Calculer $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}...$

On reconnait la somme des termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $-\frac{1}{2}$.

Ainsi : $$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}...=\lim_{n\to+\infty}1\times\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\lim_{n\to+\infty}1\times\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{3}{2}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

Or $-1<-\frac{1}{2}<0$ donc $\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=0$, et par somme et produit :

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}...=\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]=\frac{2}{3}$$

Autre méthode plus lente :

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}...=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{32}\right)...=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}...=\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}...$$

On reconnait la somme des termes d'une suite géométrique de premier terme $\frac{1}{2}$ et de raison $\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$.

Ainsi : $$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}...=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\times\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\times\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$$

Exercice 4B.9

Montrer que la suite (u_n) *définie pour tout* $n\in\mathbb{N}^*$ *par :* $u_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}$ *est bornée par l'intervalle* $\left[\frac{1}{2};1\right]$.

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}\le\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+...+\frac{1}{n}}_{n\text{ termes}}\Leftrightarrow\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}\le1$$

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}\ge\underbrace{\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+...+\frac{1}{2n}}_{n\text{ termes}}\Leftrightarrow\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}\ge\frac{1}{2}.$$

Donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2}\le u_n\le1$. La suite (u_n) est bornée dans $\left[\frac{1}{2};1\right]$.