Limites de sommes de termes

Exercice 4C.1

Montrer que la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \frac{n^2}{(n-1)!}$$

est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 4C.2

Etudier la limite de la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \frac{2^n}{n}$$

Exercice 4C.3

Démontrer les égalités suivantes :

1) $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$
2) $\sum_{k=1}^{n-1} 2^k = 2^n - 2$
3) $\sum_{k=0}^{2n-1} 2^{\frac{k}{2}} = \frac{2^n - 1}{\sqrt{2} - 1}$
4) $\sum_{k=0}^{2n} 2^{2k-1} = \frac{4^{2n+1} - 1}{6}$
5) $\sum_{k=0}^{n} 2^k \times 3^{n-k} = 3^{n+1} - 2^{n+1}$
6) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \times 2^{n-k} = \frac{2^{n+1} - (-1)^{n+1}}{3}$

Exercice 4C.4

Justifier que $\lim_{n \to +\infty} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} = 1 + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{x^i}{i!} = e^x$

Exercice 4C.1

Montrer que la suite (u_n) *définie pour tout* $n\in\mathbb{N}^*$ *par* $u_n=\dfrac{n^2}{(n-1)!}$ *est convergente et déterminer sa limite.*

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n>0$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)^2}{(n+1-1)!}\times\frac{(n-1)!}{n^2}=\frac{(n+1)^2}{n^2}\times\frac{(n-1)!}{n!}=\frac{(n+1)^2}{n^2}\times\frac{1}{n}=\frac{(n+1)^2}{n^3}=\frac{n^2+2n+1}{n^3}=\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}$$

Par somme :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=0 \text{ et la suite } (u_n) \text{ est convergente.}$$

Soit L sa limite :

$$\lim_{n\to+\infty}u_{n+1}=0\times\lim_{n\to+\infty}u_n \iff \mathrm{L}=0\times\mathrm{L} \iff \mathrm{L}=0.$$

Exercice 4C.2

Etudier la limite de la suite (u_n) *définie pour tout* $n\in\mathbb{N}^*$ *par :* $u_n=\dfrac{2^n}{n}$

Dans un premier temps, montrons par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $2^n>n$

Initialisation : pour $n=1$:

$2^1=2$ donc $2^1>1$.

Hérédité : supposons qu'il existe un rang n tel que : $2^n>n$, cela entraîne-t-il $2^{n+1}>n+1$?

→par hypothèse : $2^n>n$

$\iff 2\times2^n>2\times n$

$\iff 2^{n+1}>n+n>n+1$ →l'hérédité est vérifiée.

Par récurrence, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $2^n>n$.

On considère un entier naturel pair quelconque N, on peut écrire :

$2^{\frac{N}{2}}>\dfrac{N}{2}$ →la fonction carré est croissante sur $[0;+\infty[$

$$\iff \left(2^{\frac{N}{2}}\right)^2>\left(\frac{N}{2}\right)^2$$

$$\iff 2^N>\frac{N^2}{4}$$

$$\iff \frac{2^N}{N}>\frac{N}{4}$$

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{N}{4}=+\infty$ donc par croissances comparées :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2^n}{n}=+\infty$$

Exercice 4C.3

Démontrer les égalités suivantes :

1) $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^0 + 2^1 + \ldots + 2^n$$

On reconnait la somme des $(n+1)$ termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2.

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 1 \times \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = \frac{1-2^{n+1}}{-1} = 2^{n+1} - 1$$

2) $\sum_{k=1}^{n-1} 2^k = 2^n - 2$

$$\sum_{k=1}^{n-1} 2^k = 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1}$$

On reconnait la somme des $(n-1)$ termes d'une suite géométrique de premier terme 2 et de raison 2.

$$\sum_{k=1}^{n-1} 2^k = 2 \times \frac{1-2^{n-1}}{1-2} = 2 \times \frac{1-2^{n-1}}{-1} = 2\left(2^{n-1} - 1\right) = 2^n - 2$$

3) $\sum_{k=0}^{2n-1} 2^{\frac{k}{2}} = \frac{2^n - 1}{\sqrt{2} - 1}$

$$\sum_{k=0}^{2n-1} 2^{\frac{k}{2}} = 2^{\frac{0}{2}} + 2^{\frac{1}{2}} + \ldots + 2^{\frac{2n-1}{2}}$$

On reconnait la somme des $(2n)$ termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\sqrt{2}$

$$\sum_{k=0}^{2n-1} 2^{\frac{k}{2}} = 1 \times \frac{1-\sqrt{2}^{2n}}{1-\sqrt{2}} = \frac{1-2^n}{1-\sqrt{2}} = \frac{2^n - 1}{\sqrt{2} - 1}$$

4) $\sum_{k=0}^{2n} 2^{2k-1} = \frac{4^{2n+1} - 1}{6}$

$$\sum_{k=0}^{2n} 2^{2k-1} = 2^{-1} + 2^1 + 2^3 + \ldots + 2^{4n-1}$$

On reconnait la somme des $(2n+1)$ termes d'une suite géométrique de premier terme $\frac{1}{2}$ et de raison égale à 4.

$$\sum_{k=0}^{2n} 2^{2k-1} = \frac{1}{2} \times \frac{1-4^{2n+1}}{1-4} = \frac{1}{2} \times \frac{1-4^{2n+1}}{-3} = \frac{4^{2n+1} - 1}{6}$$

5) $\sum_{k=0}^{n} 2^k \times 3^{n-k} = 3^{n+1} - 2^{n+1}$

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \times 3^{n-k} = 2^0 \times 3^{n-0} + 2^1 \times 3^{n-1} + 2^2 \times 3^{n-2} + \ldots + 2^n \times 3^{n-n}$$

Cela revient à démontrer la formule générale : $a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b) \sum_{k=0}^{n} a^k \times b^{n-k}$.

On pose : $S = \sum_{k=0}^{n} a^k \times b^{n-k}$. Ainsi :

$$a\times S=\sum_{k=0}^{n}a^{k+1}\times b^{n-k}=a^1\times b^n+a^2\times b^{n-1}+...+a^{n+1}\times b^0$$

et $$b\times S=\sum_{k=0}^{n}a^{k}\times b^{n-k+1}=a^0\times b^{n+1}+a^1\times b^n+...+a^n\times b^1.$$

On obtient :

$$a\times S-b\times S=\left(a^1\times b^n+a^2\times b^{n-1}+...+a^{n+1}\times b^0\right)-\left(a^0\times b^{n+1}+a^1\times b^n+...+a^n\times b^1\right)$$

$$\Leftrightarrow\ (a-b)\times S=a^{n+1}-b^{n+1}$$

Ainsi :

$$a^{n+1}-b^{n+1}=(a-b)\sum_{k=0}^{n}a^k\times b^{n-k}$$

Application :

$$3^{n+1}-2^{n+1}=(3-2)\sum_{k=0}^{n}3^k\times 2^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}3^k\times 2^{n-k}.$$

6) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\times 2^{n-k}=\frac{2^{n+1}-(-1)^{n+1}}{3}$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\times 2^{n-k}=(-1)^0\times 2^{n-0}+(-1)^1\times 2^{n-1}+...+(-1)^n\times 2^{n-n}=2^n-2^{n-1}+...+(-1)^n$$

On reconnait la somme des $(n+1)$ termes d'une suite géométrique de premier terme $(-1)^n$ et de raison égale à -2.

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\times 2^{n-k}=(-1)^n\times\frac{1-(-2)^{n+1}}{1-(-2)}=(-1)^n\times\frac{1-(-1)^{n+1}\times 2^{n+1}}{1+2}=(-1)^n\times\frac{1+(-1)^n\times 2^{n+1}}{3}$$

$$=\frac{(-1)^n+(-1)^{2n}\times 2^{n+1}}{3}=\frac{(-1)^n+2^{n+1}}{3}=\frac{2^{n+1}+(-1)^n}{3}$$

Exercice 4C.4 *Justifier que* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}=1+\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{x^i}{i!}=e^x$

On pose la fonction :

$$f(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}-...+\frac{x^n}{n!}$$

On constate que :

$$f(0)=1$$

Sa dérivée est :

$$f'(x)=0+1+\frac{2x}{2!}+\frac{3x^2}{3!}+...+\frac{nx^{n-1}}{n!}$$

$$f'(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

On remarque que par passage à la limite :

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}f'(x)=\lim_{n\to+\infty}f(x)$ et on voit venir la fonction exponentielle car $f(0)=1$.

Dans notre étude, on obtient :

$$f'(x)=f(x)-\frac{x^n}{n!}$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x) - f'(x) = \frac{x^n}{n!}.$$

Or : $$\frac{x^n}{n!} = \frac{x \times x \times \ldots \times x}{1 \times 2 \times \ldots \times n} = \frac{x}{1} \times \frac{x}{2} \times \ldots \frac{x}{n}$$

x étant un réel donné, par passage à la limite, on obtient :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{x}{n} = 0$$

et $$\lim_{n \to +\infty} \frac{x^n}{n!} = \lim_{n \to +\infty} \frac{x}{1} \times \frac{x}{2} \times \ldots \frac{x}{n} = 0$$

Ainsi :

$$\lim_{n \to +\infty} f(x) - f'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} f(x) = \lim_{n \to +\infty} f'(x).$$

La fonction égale à sa dérivée et prenant la valeur 1 au point d'abscisse 0 est la fonction exponentielle :

$$\lim_{n \to +\infty} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} = 1 + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{x^i}{i!} = e^x$$