Exercices sur les suites arithmético-géométriques

Exercice 5A.1

On considère une suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 4$ et $U_{n+1} = 2U_n - 3$.

Soit la suite (V_n) définie sur N par : $V_n = U_n - 3$.

1) Quelle est la nature de la suite (U_n).
2) Montrer que la suite (V_n) est géométrique.
3) Donner l'expression de V_n en fonction de *n*.
4) En déduire l'expression de U_n en fonction de *n*.
5) Calculer la somme des 11 premiers termes de (U_n).

Exercice 5A.2

On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 8$ et $u_{n+1} = 0{,}95u_n + 0{,}5$.

Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = u_n - 10$.

a) Déterminer la nature de la suite (v_n).
b) Exprimer les termes de la suite (v_n) en fonction de *n*.
c) En déduire l'expression de u_n en fonction de *n*.
d) Déterminer la limite des termes de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 5A.3

On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = -2$ et $u_{n+1} = 2u_n + 0{,}5$.

Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = u_n + 0{,}5$.

a) Déterminer la nature de la suite (v_n).
b) Exprimer les termes de la suite (v_n) en fonction de *n*.
c) En déduire l'expression de u_n en fonction de *n*.
d) Déterminer la limite des termes de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 5A.1

On considère une suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 4$ et $U_{n+1} = 2U_n - 3$.

Soit la suite (V_n) définie sur N par : $V_n = U_n - 3$.

1) *Quelle est la nature de la suite (U_n).*

   (U_n) est une suite arithmético-géométrique.

2) *Montrer que la suite (V_n) est géométrique.*

   $V_{n+1} = U_{n+1} - 3 = 2U_n - 3 - 3 = 2U_n - 6 = 2(U_n - 3) = 2 \times V_n$

   La suite (V_n) est géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $V_0 = U_0 - 3 = 1$.

3) *Donner l'expression de V_n en fonction de n.*

   $V_n = V_0 \times q^n = 1 \times 2^n = 2^n$

4) *En déduire l'expression de U_n en fonction de n.*

   $V_n = U_n - 3$ donc $U_n = V_n + 3 = 2^n + 3$

5) *Calculer la somme des 11 premiers termes de (U_n).*

$$U_0 + U_1 + ... + U_{10} = (V_0 + 3) + (V_1 + 3) + ... + (V_{10} + 3) = V_0 + V_1 + ... + V_{10} + 11 \times 3$$

$$= V_0 \times \frac{1 - q^{nombre\,de\,termes}}{1 - q} + 11 \times 3$$

$$= 1 \times \frac{1 - 2^{11}}{1 - 2} + 33 = \frac{1 - 2^{11}}{-1} + 33 = 2^{11} - 1 + 33 = 2080$$

```
u=4
n=0
s=4
for i in range(1,11):
    u=2*u-3
    n+=1
    s+=u
print("La somme cherchée est S(",n,")=",s)
```

→ La somme cherchée est S(10)= 2080

Exercice 5A.2

On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 8$ et $u_{n+1} = 0,95u_n + 0,5$.

Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = u_n - 10$.

a) *Déterminer la nature de la suite (v_n).*

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 10 = 0,95u_n + 0,5 - 10 = 0,95u_n - 9,5 = 0,95\left(u_n - \frac{9,5}{0,95}\right) = 0,95(u_n - 10) = 0,95v_n$$

Ou : $v_{n+1} = u_{n+1} - 10 = 0,95u_n + 0,5 - 10 = 0,95u_n - 9,5 = 0,95(v_n + 10) - 9,5 = 0,95v_n$

La suite (v_n) est géométrique de raison 0,95.

b) *Exprimer les termes de la suite (v_n) en fonction de n.*

Son premier terme est :

$v_0 = u_0 - 10 = 8 - 10 = -2$.

L'expression de la suite (v_n) est, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = v_0 \times q^n = -2 \times 0,95^n$$

c) *En déduire l'expression de u_n en fonction de n.*

$$u_n = v_n + 10 = -2 \times 0,95^n + 10$$

d) *Déterminer la limite des termes de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.*

$0 < 0,95 < 1$ donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,95^n = 0$

Par produit et par somme :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 10$$

Exercice 5A.3

On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = -2$ et $u_{n+1} = 2u_n + 0,5$.

Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = u_n + 0,5$.

a) *Déterminer la nature de la suite (v_n).*

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 0,5 = 2u_n + 0,5 + 0,5 = 2u_n + 1 = 2\left(u_n + \frac{1}{2}\right) = 2v_n$$

Ou : $v_{n+1} = u_{n+1} + 0,5 = 2u_n + 0,5 + 0,5 = 2u_n + 1 = 2(v_n - 0,5) + 1 = 2v_n$

La suite (v_n) est géométrique de raison 2.

b) *Exprimer les termes de la suite (v_n) en fonction de n.*

Son premier terme est :

$$v_0 = u_0 + 0,5 = -2 + 0,5 = -1,5.$$

L'expression de la suite (v_n) est, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = v_0 \times q^n = -1,5 \times 2^n$$

c) *En déduire l'expression de u_n en fonction de n.*

$$u_n = v_n - 0,5 = -1,5 \times 2^n - 0,5$$

d) *Déterminer la limite des termes de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.*

$2 > 1$ donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$

Par produit et par somme :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$$