Exercice 7A.1 Étude d'une suite

Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2n - 1$.

1) Déterminer les termes : u_1, u_2, u_3.
2) On pose $v_n = u_n - 4n + 10$.
   a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
   b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de *n*.
   c) Déterminer la limite de la suite (u_n).
3) On pose $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$.

   Montrer que : $S_n = 22\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] + (n+1)(2n-10)$.

Exercice 7A.2

Soit la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 6$ et , pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - 3n + 5$.

1) Déterminer les trois premiers termes de la suite.
2) On pose $v_n = u_n - 3n + 2$.
   a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2.
   b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de *n*.
   c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 7A.3

Soit la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et , pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$.

1) Déterminer les trois premiers termes de la suite.
2) On pose $v_n = u_n - n$.
   a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
   b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de *n*.
   c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 7A.4

Soit la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et , pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 1$

Soit (v_n) la suite définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 4u_n - 6n + 15$

1) Montrer que (v_n) est une suite géométrique
2) Calculer v_n en fonction de n

   En déduire que, pour tout naturel n , $u_n = \frac{19}{4} \times \frac{1}{3^n} + \frac{6n - 15}{4}$
3) Montrer que la suite (u_n) peut s'écrire sous la forme $(u_n) = (\mathrm{T_n}) + (\mathrm{W_n})$,

   où $(\mathrm{T_n})$ est une suite géométrique et $(\mathrm{W_n})$ est une suite arithmétique.
4) Calculer $\mathrm{S'_n} = \mathrm{T_0} + \mathrm{T_1} + ... + \mathrm{T_n}$ et $\mathrm{S''_n} = \mathrm{W_0} + \mathrm{W_1} + ... + \mathrm{W_n}$

   En déduire $\mathrm{S}_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

Exercice 7A.5 Conjecture

Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + 2(n+1)$.

1) a) Déterminer les termes : u_1, u_2, u_3, u_4, u_5.

   b) La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?

   c) La conjecture $u_n = n(n+1)$ est-elle justifiée ?

2) a) On souhaite écrire un algorithme permettant de calculer u_n, n étant donné.

   Recopier et compléter les pointillés pour que l'algorithme ci-dessous permette de répondre au problème posé.

   Variables : *N*, *I* entiers *U* réels
   Entrées et initialisation
       Lire *N*
       $\cdots \to U$
   Traitement
       pour *I* de . . . à . . . **faire**
           $\ldots\ldots \to U$
       fin
   Sorties : Afficher *U*

   b) Recopier et compléter le tableau suivant :

n	10	20	50	85
u_n				

   c) La conjecture est-elle toujours vérifiée ? Pourquoi ?

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. Quet

Exercice 7A.1 Étude d'une suite

Soit la suite (u_n) *définie par :* $u_0 = 1$ *et* $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2n - 1$.

1) *Déterminer les termes :* u_1, u_2, u_3.

$$u_1 = u_{0+1} = \frac{1}{2}u_0 + 2\times 0 - 1 = \frac{1}{2}\times 1 - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$u_2 = u_{1+1} = \frac{1}{2}u_1 + 2\times 1 - 1 = \frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right) + 2 - 1 = -\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4}$$

$$u_3 = u_{2+1} = \frac{1}{2}u_2 + 2\times 2 - 1 = \frac{1}{2}\times\frac{3}{4} + 4 - 1 = \frac{3}{8} + 3 = \frac{27}{8}$$

2) *On pose* $v_n = u_n - 4n + 10$.

a) *Montrer que la suite* (v_n) *est une suite géométrique de raison* $\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 4(n+1) + 10 \\ &= \frac{1}{2}u_n + 2n - 1 - 4n - 4 + 10 \\ &= \frac{1}{2}u_n - 2n + 5 \\ &= \frac{1}{2}(u_n - 4n + 10) \\ &= \frac{1}{2}v_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

b) *Exprimer* v_n *puis* u_n *en fonction de n.*

$$v_0 = u_0 - 4\times 0 + 10 = 1 + 10 = 11$$

L'expression générale de la suite (v_n) est :

$$v_n = v_0 \times q^n = 11\times\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

La relation $v_n = u_n - 4n + 10$ donne :

$$u_n = v_n + 4n - 10 = 11\times\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4n - 10$$

c) *Déterminer la limite de la suite* (u_n).

$0 < \frac{1}{2} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 4n - 10 = +\infty$.

Par produit et par somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

3) *On pose* $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$. *Montrer que :* $S_n = 22\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] + (n+1)(2n-10)$.

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n \\ &= \left[11\times\left(\frac{1}{2}\right)^0 + 4\times 0 - 10\right] + \left[11\times\left(\frac{1}{2}\right)^1 + 4\times 1 - 10\right] + ... + \left[11\times\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4\times n - 10\right] \end{aligned}$$

$$=11\left[\left(\frac{1}{2}\right)^0+\left(\frac{1}{2}\right)^1+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]+4(0+1+\ldots+n)-10\times(n+1)$$

$$=11\times1\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}+4\times\frac{n(n+1)}{2}-10(n+1)$$

$$=11\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}}+2n(n+1)-10(n+1)$$

$$=22\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]+(n+1)(2n-10)$$

Exercice 7A.2

Soit la suite numérique (u_n) *définie par :* $u_0=6$ *et , pour tout* $n\in\mathbb{N}$ *,* $u_{n+1}=2u_n-3n+5$.

1) *Déterminer les trois premiers termes de la suite.*

$$u_1=u_{0+1}=2u_0-3\times0+5=2\times6+5=17$$

$$u_2=u_{1+1}=2u_1-3\times1+5=2\times17-3+5=36$$

$$u_3=u_{2+1}=2u_2-3\times2+5=2\times36-6+5=71$$

2) *On pose* $v_n=u_n-3n+2$.

a) *Montrer que la suite* (v_n) *est une suite géométrique de raison 2.*

$$v_{n+1}=u_{n+1}-3(n+1)+2=2u_n-3n+5-3n-3+2=2u_n-6n+4=2(u_n-3n+2)=2v_n$$

La suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2.

b) *Exprimer* v_n *puis* u_n *en fonction de n.*

$$v_0=u_0-3\times0+2=6+2=8.$$

Pour tout entier naturel n, l'expression générale de la suite (v_n) est :

$$v_n=v_0\times q^n=8\times2^n.$$

La relation $v_n=u_n-3n+2$ donne :

$$u_n=v_n+3n-2=8\times2^n+3n-2$$

c) *Déterminer la limite de la suite* (u_n).

$2>1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}2^n=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}3n-2=+\infty$.

Par somme des limites : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$

Exercice 7A.

Soit la suite numérique (u_n) *définie par :* $u_0=2$ *et , pour tout* $n\in\mathbb{N}$ *,* $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1$.

1) *Déterminer les trois premiers termes de la suite.*

$$u_1=u_{0+1}=\frac{2}{3}u_0+\frac{1}{3}\times0+1=\frac{2}{3}\times2+1=\frac{7}{3}$$

$$u_2=u_{1+1}=\frac{2}{3}u_1+\frac{1}{3}\times1+1=\frac{2}{3}\times\frac{7}{3}+\frac{1}{3}+1=\frac{14}{9}+\frac{3}{9}+\frac{9}{9}=\frac{26}{9}$$

$$u_3 = u_{2+1} = \frac{2}{3}u_2 + \frac{1}{3}\times 2 + 1 = \frac{2}{3}\times\frac{26}{9} + \frac{2}{3} + 1 = \frac{52}{27} + \frac{18}{27} + \frac{27}{27} = \frac{97}{27}$$

2) *On pose* $v_n = u_n - n$.

a) *Montrer que la suite* (v_n) *est une suite géométrique.*

$$v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - n - 1 = \frac{2}{3}u_n - \frac{2}{3}n = \frac{2}{3}(u_n - n) = \frac{2}{3}v_n$$

La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

b) *Exprimer* v_n *puis* u_n *en fonction de n.*

$v_0 = u_0 - 0 = 2$.

Pour tout entier naturel n, l'expression générale de la suite (v_n) est :

$$v_n = v_0 \times q^n = 2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

La relation $v_n = u_n - n$ donne :

$$u_n = v_n + n = 2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$$

c) *Déterminer la limite de la suite* (u_n).

$$0 < \frac{2}{3} < 1 \text{ donc } \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} n = +\infty.$$

Par somme des limites : $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Exercice 7A.4

La suite numérique (u_n) *est définie par :* $u_0 = 1$ *et , pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 1$

La suite (v_n) *est définie pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *par :* $v_n = 4u_n - 6n + 15$

1) *Montrer que* (v_n) *est une suite géométrique*
2) *Calculer* v_n *en fonction de n*

   En déduire que, pour tout naturel n , $u_n = \frac{19}{4}\times\frac{1}{3^n} + \frac{6n-15}{4}$
3) *Montrer que la suite* (u_n) *peut s'écrire sous la forme* $(u_n) = (\mathrm{T_n}) + (\mathrm{W_n})$,

   où $(\mathrm{T_n})$ *est une suite géométrique et* $(\mathrm{W_n})$ *est une suite arithmétique.*
4) *Calculer* $\mathrm{S'_n} = \mathrm{T_0} + \mathrm{T_1} + \ldots + \mathrm{T_n}$ *et* $\mathrm{S''_n} = \mathrm{W_0} + \mathrm{W_1} + \ldots + \mathrm{W_n}$

   En déduire $\mathrm{S}_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

1) $v_{n+1} = 4u_{n+1} - 6(n+1) + 15 = 4\left(\frac{1}{3}u_n + n - 1\right) - 6(n+1) + 15 = \frac{4}{3}u_n + 4n - 4 - 6n - 6 + 15$

$$= \frac{4}{3}u_n - 2n + 5 = \frac{1}{3}(4u_n - 6n + 15) = \frac{1}{3}v_n$$

donc (v_n) **est une suite géométrique** de raison $q = \frac{1}{3}$ et de 1er terme :

$$v_0 = 4u_0 - 6\times 0 + 15 = 4\times 1 - 0 + 15 = 19$$

2) Ainsi $v_n = 19\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$

Or $v_n = 4u_n - 6n + 15$ donc $u_n = \frac{v_n + 6n - 15}{4} = \frac{19\times\left(\frac{1}{3}\right)^n + 6n - 15}{4} = \frac{19}{4}\times\frac{1}{3^n} + \frac{6n-15}{4}$

3) On pose $(\mathrm{T_n})$ définie, pour tout $n\in\mathbb{N}$, par $\mathrm{T}_n = \frac{19}{4}\times\frac{1}{3^n}$.

→ $(\mathrm{T_n})$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de 1er terme $\mathrm{T}_0 = \frac{19}{4}$

On pose (W_n) la suite définie, pour tout $n\in\mathbb{N}$, par $\mathrm{W}_n = \frac{6n-15}{4} = \frac{3}{2}n - \frac{15}{4}$

(W_n) est une suite arithmétique de raison $r = \frac{3}{2}$ et de 1er terme $\mathrm{W}_0 = -\frac{15}{4}$

et , pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $u_n = \mathrm{T}_n + \mathrm{W}_n$.

4) $\mathrm{S}'_n = \mathrm{T}_0 + \mathrm{T}_1 + \ldots + \mathrm{T}_n = \mathrm{T}_0\frac{1-\mathrm{q}^{n+1}}{1-\mathrm{q}} = \frac{19}{4}\times\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{19}{4}\times\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}} = \frac{19}{4}\times\frac{3}{2}\times\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{\mathrm{n}+1}\right]$

$= \frac{57}{8}\left(1-\frac{1}{3^{\mathrm{n}+1}}\right)$

$\mathrm{S}''_n = \mathrm{W}_0 + \mathrm{W}_1 + \ldots + \mathrm{W}_n = (n+1)\frac{\mathrm{W}_0 + \mathrm{W}_n}{2} = (n+1)\frac{-\frac{15}{4} + \frac{3}{2}n - \frac{15}{4}}{2} = (n+1)\frac{-\frac{15}{2} + \frac{3}{2}n}{2}$

$= \frac{(n+1)(3n-15)}{4}$

$\mathrm{S}_n = \mathrm{S}'_n + \mathrm{S}''_n = \frac{57}{8}\left[1-\frac{1}{3^{n+1}}\right] + \frac{(n+1)(3n-15)}{4}$

Exercice 7A.5 Conjecture

Soit la suite (u_n) *définie par :* $u_0 = 0$ *et* $u_{n+1} = u_n + 2(n+1)$.

1) a) *Déterminer les termes :* u_1, u_2, u_3, u_4, u_5.

$u_1 = u_{0+1} = u_0 + 2(0+1) = 2$

$u_2 = u_{1+1} = u_1 + 2(1+1) = 2 + 4 = 6$

$u_3 = u_{2+1} = u_2 + 2(2+1) = 6 + 6 = 12$

$u_4 = u_{3+1} = u_3 + 2(3+1) = 12 + 8 = 20$

$u_5 = u_{4+1} = u_4 + 2(4+1) = 20 + 10 = 30$

b) *La suite* (u_n) *est-elle arithmétique ? géométrique ?*

$u_2 - u_1 = 6 - 2 = 4$ et $u_3 - u_2 = 12 - 6 = 6$ →la suite n'est pas arithmétique

$\frac{u_2}{u_1} = \frac{6}{2} = 3$ et $\frac{u_3}{u_2} = \frac{12}{6} = 2$ →la suite n'est pas géométrique *c) La conjecture $u_n = n(n+1)$ est-elle justifiée ?*

$$u_1 = 2 = 1\times 2 \;\;,\;\; u_2 = 6 = 2\times 3 \;\;,\;\; u_3 = 12 = 3\times 4 \;\;,\;\; u_4 = 20 = 4\times 5 \;\;,\;\; u_5 = 30 = 5\times 6$$

L'hypothèse $u_n = n(n+1)$ est plausible.

L'initialisation est vérifiée.

Hérédité : supposons qu'il existe un rang n tel que : $u_n = n(n+1)$,

→cela implique-t-il $u_{n+1} = (n+1)((n+1)+1) = (n+1)(n+2) = n^2 + 3n + 2$?

Par définition puis en injectant l'hypothèse :

$$u_{n+1} = u_n + 2(n+1) = n(n+1) + 2(n+1) = (n+1)(n+2)$$

L'hérédité est vérifiée.

Par récurrence, pour tout entier naturel n, $u_n = n(n+1)$.

2) a) On souhaite écrire un algorithme permettant de calculer u_n, n étant donné.

Recopier et compléter les pointillés pour que l'algorithme ci-dessous permette de répondre au problème posé.

Variables : *N*, *I* entiers *U* réels
Entrées et initialisation
Lire *N*
0 → *U*
Traitement
pour *I* de **1** à **N** **faire**
U + 2*(I + 1) → *U*
fin
Sorties : Afficher *U*

```python
n = int(input("Veuillez saisir un rang"))
u = 0
for i in range(0,n):
    u = u + 2*(i+1)
print(u)
```

b) Recopier et compléter le tableau suivant :

n	10	20	50	85
u_n	110	420	2550	7310

c) La conjecture est-elle toujours vérifiée ? Pourquoi ?

$20\times 21 = 420$, $50\times 51 = 2550$, $85\times 86 = 7310$ →l'hypothèse semble se confirmer.