Suites définies conjointement *(du site ChingAtome - chingmath.fr)*

Exercice 6B.1 :

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies conjointement par les relations suivantes :

$$u_0 = 5 \ , \ v_0 = 4 \text{ et } \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - v_n \\ v_{n+1} = -3u_n + 4v_n \end{cases} .$$

1) On considère la suite (w_n) définie par la relation :

   $w_n = v_n - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   a) Etablir que la suite (w_n) est géométrique de raison 5.
   b) En déduire que, pour tout entier naturel n, le terme de rang n s'exprime par :
      $w_n = -5^n$.

2) On considère la suite (t_n) définie par :

   $t_n = 3u_n + v_n$.

   a) Montrer que $t_0 = 19$.
   b) Etablir que pour tout entier naturel n, on a l'égalité :
      $t_{n+1} = t_n$.
   c) En déduire les limites des suites (u_n) et (v_n).

Exercice 6B.2 :

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies conjointement par les relations suivantes :

$$u_0 = 3 \ , \ v_0 = -1 \text{ et } \begin{cases} u_{n+1} = 3u_n - 2v_n \\ v_{n+1} = -u_n + 2v_n \end{cases} .$$

1) On considère la suite (w_n) définie par la relation :

   $w_n = v_n - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   a) Etablir que la suite (w_n) est géométrique de raison 4.
   b) En déduire que, pour tout entier naturel n, le terme de rang n s'exprime par :
      $w_n = -4 \times 4^n$.

2) On considère la suite (t_n) définie par :

   $t_n = 4u_n + 8v_n$.

   a) Donner la valeur du terme t_0.
   b) Etablir que pour tout entier naturel n, on a l'égalité :
      $t_{n+1} = t_n$.

      On admettra que la suite (t_n) est constante.
   c) Déduire une expression des termes des suites (u_n) et (v_n).
   d) En déduire les limites des suites (u_n) et (v_n).

Exercice 6B.3 :

On considère les deux suites (a_n) et (b_n) définies par :

$$a_0 = 6 \ , \ b_0 = 1 \text{ et } \begin{cases} a_{n+1} = 0,2a_n + 1,3b_n \\ b_{n+1} = -0,8a_n - 0,2b_n \end{cases} .$$

1) Exprimer les termes a_{n+2} et b_{n+2} en fonction des termes a_n et b_n.
2) Que peut-on dire des termes (a_{2n}) ?

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. Quet

Exercice 6B.1 :

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies conjointement par les relations suivantes :

$$u_0 = 5 \ , \ v_0 = 4 \ et \ \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - v_n \\ v_{n+1} = -3u_n + 4v_n \end{cases}.$$

1) *On considère la suite (w_n) définie par la relation :*

$w_n = v_n - u_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

a) *Etablir que la suite (w_n) est géométrique de raison 5.*

$w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = (-3u_n + 4v_n) - (2u_n - v_n) = -3u_n + 4v_n - 2u_n + v_n = -5u_n + 5v_n = 5(v_n - u_n)$

Donc $w_{n+1} = 5w_n$.

La suite (w_n) est géométrique de raison 5.

b) *En déduire que, pour tout entier naturel n, le terme de rang n s'exprime par : $w_n = -5^n$.*

Son premier terme est $w_0 = v_0 - u_0 = 4 - 5 = -1$ donc l'expression générale de la suite (w_n) est :

$w_n = (-1) \times 5^n = -5^n$

2) *On considère la suite (t_n) définie par : $t_n = 3u_n + v_n$.*

a) *Montrer que $t_0 = 19$.*

$t_0 = 3u_0 + v_0 = 3 \times 5 + 4 = 19$

b) *Etablir que pour tout entier naturel n, on a l'égalité : $t_{n+1} = t_n$.*

$t_{n+1} = 3u_{n+1} + v_{n+1} = 3(2u_n - v_n) + (-3u_n + 4v_n) = 6u_n - 3v_n - 3u_n + 4v_n = 3u_n + v_n = t_n$

La suite (t_n) est constante.

c) *En déduire les limites des suites (u_n) et (v_n).*

D'après ce qui précède, on a pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} w_n = -5^n \\ t_n = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_n - u_n = -5^n \\ 3u_n + v_n = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_n = -5^n + u_n \\ 3u_n + (-5^n + u_n) = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_n = -5^n + u_n \\ 4u_n = 19 + 5^n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_n = -5^n + u_n \\ u_n = \frac{19}{4} + \frac{1}{4} \times 5^n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_n = -5^n + \frac{19}{4} + \frac{1}{4} \times 5^n \\ u_n = \frac{19}{4} + \frac{1}{4} \times 5^n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_n = \frac{19}{4} - \frac{3}{4} \times 5^n \\ u_n = \frac{19}{4} + \frac{1}{4} \times 5^n \end{cases}$$

$5 > 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 5^n = +\infty$

Par produit et somme des limites :

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$.

Exercice 6B.2 :

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies conjointement par les relations suivantes :

$$u_0 = 3 \ , \ v_0 = -1 \ et \ \begin{cases} u_{n+1} = 3u_n - 2v_n \\ v_{n+1} = -u_n + 2v_n \end{cases}.$$

1) *On considère la suite (w_n) définie par la relation : $w_n = v_n - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

a) *Etablir que la suite (w_n) est géométrique de raison 4.*

$w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = (-u_n + 2v_n) - (3u_n - 2v_n) = -u_n + 2v_n - 3u_n + 2v_n = -4u_n + 4v_n = 4(v_n - u_n)$

Soit : $w_{n+1} = 4w_n$.

La suite (w_n) est géométrique de raison 4.

b) *En déduire que, pour tout entier naturel n, le terme de rang n s'exprime par : $w_n = -4\times 4^n$.*

Son premier terme est $w_0 = v_0 - u_0 = -1-3 = -4$ donc l'expression générale de la suite (w_n) est :

$$w_n = -4\times 4^n.$$

2) *On considère la suite (t_n) définie par : $t_n = 4u_n + 8v_n$.*

a) *Donner la valeur du terme t_0.*

$$t_0 = 4u_0 + 8v_0 = 4\times 3 + 8\times(-1) = 12-8 = 4$$

b) *Etablir que pour tout entier naturel n, on a l'égalité : $t_{n+1} = t_n$.*

On admettra que la suite (t_n) est constante.

$$t_{n+1} = 4u_{n+1} + 8v_{n+1} = 4(3u_n - 2v_n) + 8(-u_n + 2v_n) = 12u_n - 8v_n - 8u_n + 16v_n = 4u_n + 8v_n = t_n$$

La suite (t_n) est constante.

c) *Déduire une expression des termes des suites (u_n) et (v_n).*

D'après ce qui précède, on a pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} w_n = -4^{n+1} \\ t_n = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_n - u_n = -4^{n+1} \\ 4u_n + 8v_n = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_n = -4^{n+1} + u_n \\ 4u_n + \left(-4^{n+1} + u_n\right) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_n = -4^{n+1} + u_n \\ 5u_n = 4 + 4^{n+1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_n = -4^{n+1} + \dfrac{4}{5} + \dfrac{1}{5}\times 4^{n+1} \\ u_n = \dfrac{4}{5} + \dfrac{1}{5}\times 4^{n+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_n = \dfrac{4}{5} - \dfrac{4}{5}\times 4^{n+1} \\ u_n = \dfrac{4}{5} + \dfrac{1}{5}\times 4^{n+1} \end{cases}$$

d) *En déduire les limites des suites (u_n) et (v_n).*

$4>1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 4^n = +\infty$

Par produit et somme des limites :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

Exercice 6B.3 :

On considère les deux suites (a_n) et (b_n) définies par : $a_0 = 6$, $b_0 = 1$ et $\begin{cases} a_{n+1} = 0,2a_n + 1,3b_n \\ b_{n+1} = -0,8a_n - 0,2b_n \end{cases}$.

1) *Exprimer les termes a_{n+2} et b_{n+2} en fonction des termes a_n et b_n.*

Pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} a_{n+2} = 0,2a_{n+1} + 1,3b_{n+1} = 0,2(0,2a_n + 1,3b_n) + 1,3(-0,8a_n - 0,2b_n) \\ b_{n+2} = -0,8a_{n+1} - 0,2b_{n+1} = -0,8(0,2a_n + 1,3b_n) - 0,2(-0,8a_n - 0,2b_n) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{n+2} = 0,04a_n + 0,26b_n - 1,04a_n - 0,26b_n = -a_n \\ b_{n+2} = -0,16a_n - 1,04b_n + 0,16a_n + 0,04b_n = -b_n \end{cases}$$

2) *Que peut-on dire des termes (a_{2n}) ?*

Pour tout entier naturel n : $a_{n+2} = -a_n$.

On obtient : $a_{2n} = \pm a_0$, ce qui s'écrit : $\begin{cases} a_{2n} = -6 & si\ 4|2n \\ a_{2n} = 6 & si\ 4|(2n+2) \end{cases}$