Problèmes sur les suites

Exercice 6C.1

Soit le nombre $a = 1{,}714714714\ldots$ comprenant une partie décimale illimitée de période 714.

En utilisant $a_n = 1{,}714714714\ldots714$, le nombre comprenant n périodes, écrire a sous la forme $\frac{p}{q}$ où p et q sont deux entiers naturels non nuls.

Exercice 6C.2

La suite u est définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{2n^2 - 3\sin n}{n^2+1}.$$

1) Donner une valeur approchée de u_{10} et u_{100}.
   Que peut-on conjecturer concernant une limite éventuelle de la suite u ?
2) Prouver que pour tout entier naturel n :
   $$\frac{2n^2-3}{n^2+1} \le u_n \le \frac{2n^2+3}{n^2+1}.$$
   En déduire la limite de la suite u.
3) a) Justifier que pour tout entier n :
   $$\frac{-5}{n^2+1} \le u_n - 2 \le \frac{1}{n^2+1}.$$
   b) A partir de quel rang N est-on certain que pour tout entier $n \ge N$, la distance entre u_n et 2 est inférieure à 10^{-3} ?
   c) A-t-on pour tout entier $n \ge N$, $u_n \le 2$?

Exercice 6C.3

On considère la suite u définie par :

$$u_0 = 0,\ u_1 = 1 \text{ et pour tout entier } n \ge 0,\ u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n$$

et les suites v et w définies pour tout entier naturel n par :

$$v_n = u_{n+1} - u_n \quad \text{et} \quad w_n = u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n.$$

1) Démontrer que la suite v est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.
2) Quelle est la nature de la suite w ?
3) En déduire l'expression de w_n en fonction de n.
4) La suite u converge-t-elle ?

Exercice 6C.4 VRAI ou FAUX

On considère une suite u positive et la suite v définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$v_n = \frac{u_n}{1+u_n}.$$

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1) Pour tout entier naturel n, $0 \le v_n \le 1$.
2) Si la suite u est convergente, alors la suite v est convergente.
3) Si la suite u est croissante, alors la suite v est croissante.
4) Si la suite v est convergente, alors la suite u est convergente.

Exercice 6C.5

Soit a et b deux nombres réels strictement positifs.

On considère la suite (u_n) définie pour tout n ∈ ℕ par : $u_n = \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$

a) Quelle est la limite de la suite (u_n) lorsque a = b ?

b) Exprimer u_n en fonction du quotient $\dfrac{a}{b}$. En déduire la limite de la suite (u_n) lorsque a < b ?

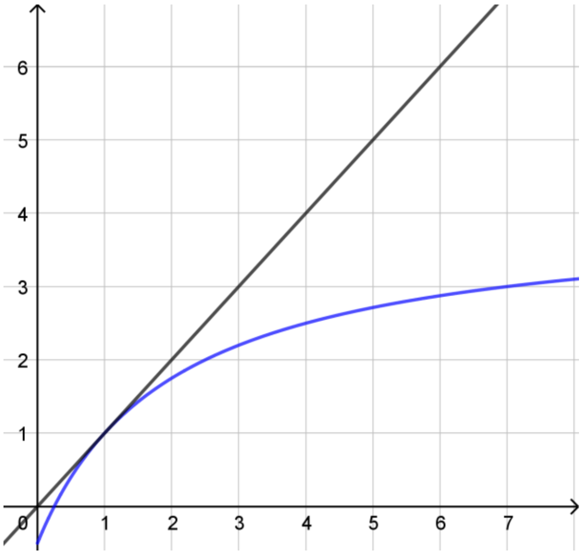
c) Quelle est la limite de la suite (u_n) lorsque a > b ? Justifier la réponse.

Exercice 6C.6

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 6$ et la relation : $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2}$

1. Déterminer la fonction f telle que : $u_{n+1} = f(u_n)$ et montrer que l'équation $f(x) = x$ a une solution α.
2. Montrez que *f* est strictement croissante sur $]-2;+\infty[$.
3. Placer u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, sur l'axe des abscisses du graphique joint en annexe, sur lequel est tracé la courbe représentative de *f*.
   Aucune justification n'est demandée mais on laissera les traits de construction.
4. Donner une conjecture sur la convergence de la suite (u_n).
5. On pose : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$.

   Montrer que : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} = \dfrac{1}{3} + v_n$
6. a. Donner une expression de v_n en fonction de *n*.
   b. En déduire une expression de u_n en fonction de *n*.
7. Démontrer que la suite (u_n) converge vers un nombre que l'on précisera.



Exercice 6C.7

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \dfrac{3}{5}u_n + 2 \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = \dfrac{3}{5}v_n + 2 \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n < v_n$.
2) Si les suites (u_n) et (v_n) ont des limites finies L et L', que peut-on dire de L et L' ?
3) En utilisant un tableur, conjecturer la limite de chacune des suites.

Exercice 6C.8

On considère la suite (u_n) définie pour $n \geq 1$ par $u_n = \dfrac{n+1}{2n + \sin n}$.

1) En utilisant un tableur, conjecturer la limite de la suite (u_n).
2) Démontrer que pour tout $n \geq 1$, on a $\dfrac{1}{2} < u_n$. (On dit que la suite (u_n) est minorée par $\dfrac{1}{2}$).
3) Démontrer qu'à partir d'un certain rang, on a $u_n < \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n}$.
4) Justifier que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 6C.9

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{3n-1}{n+1}$.

1) Donner, en utilisant une calculatrice, des valeurs décimales approchées de u_0, u_1, ... , u_{10} et u_{100}.
2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $-1 \leq u_n \leq 3$.
   On dit que la suite (u_n) est minorée par -1 et majorée par 3.
3) Étudier le sens de variation de la suite (u_n).
4) Démontrer que pour n suffisamment grand on a $u_n > 2{,}999$.
   Que peut-on penser de la limite de (u_n) ?

Exercice 6C.10

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5. Placer les points correspondants sur une droite graduée.
2) Démontrer que la suite (u_n) est majorée.
3) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
4) justifier que la suite (u_n) a une limite finie. Que peut-on penser de la valeur de cette limite ?

Exercice 6C.11

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$.

1) Donner des valeurs approchées à 10^{-3} près de u_1, u_2, ... , u_{10}.
2) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq u_n \leq 3$.
3) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
4) Justifier que la suite (u_n) a une limite finie. Quelle est cette limite ?

Exercice 6C.12

Soit (u_n) et (v_n) les suites définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 9 \ , \qquad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3 \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + 6$$

1) a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique à termes positifs

   b) Calculer la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ puis la somme $S'_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$

   c) Déterminer les limites de (S_n) et (S'_n).

2) On définit la suite (w_n) par $w_n = \ln v_n$, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

   Montrer que (w_n) est une suite arithmétique

   Calculer $S''_n = \sum_{k=0}^{n} w_k$ et déterminer la limite de (S''_n)

3) Calculer le produit $P_n = v_0 \times v_1 \times ... \times v_n$ en fonction de n

   En déduire la limite de (P_n).

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. Quet

Exercice 6C.1 Soit le nombre a = 1,714714714…

En utilisant $a_n = 1,714714714\ldots 714$, le nombre comprenant n périodes, écrire a sous la forme $\frac{p}{q}$ où p et q sont deux entiers naturels non nuls.

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \frac{714}{10^3} + \frac{714}{10^6} + \ldots + \frac{714}{10^{3n}} \\ &= 1 + 714\left(\frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^6} + \ldots + \frac{1}{10^{3n}}\right) \\ &= 1 + 714\left(\frac{1}{10^3} + \left(\frac{1}{10^3}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{10^3}\right)^n\right) \end{aligned}$$

On reconnait dans la parenthèse la somme des n premiers termes d'une suite géométrique (u_n) de premier terme $u_1 = \frac{1}{10^3}$ et de raison $q = \frac{1}{10^3}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + 714 \times \frac{1}{10^3} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{10^3}\right)^n}{1 - \frac{1}{10^3}} \\ &= 1 + \frac{714}{1000} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{10^3}\right)^n}{\frac{1000}{1000} - \frac{1}{1000}} \\ &= 1 + \frac{714}{1000} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{10^3}\right)^n}{\frac{999}{1000}} \\ &= 1 + \frac{714}{999} \times \left[1 - \left(\frac{1}{10^3}\right)^n\right] \end{aligned}$$

Ainsi : $a = \lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \frac{714}{999} \times \left[1 - \left(\frac{1}{10^3}\right)^n\right] = 1 + \frac{714}{999} = \frac{999}{999} + \frac{714}{999} = \frac{1713}{999} = \frac{571}{333}$

Exercice 6C.2

La suite u est définie sur $\mathbb{N}$ *par :* $u_n = \frac{2n^2 - 3\sin n}{n^2 + 1}$.

1) $u_{10} = \frac{2 \times 10^2 - 3 \times \sin 10}{10^2 + 1} \simeq 1,996$ et $u_{100} = \frac{2 \times 100^2 - 3 \times \sin 100}{100^2 + 1} \simeq 1,99995$

Il semble que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$.

2) On sait que pour tout réel *n*, on a :

$$\begin{aligned} & -1 \le \sin n \le 1 \\ \Leftrightarrow\ & 3 \ge -3\sin n \ge -3 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2n^2+3 \geq 2n^2-3\sin n \geq 2n^2-3$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2n^2+3}{n^2+1} \geq \frac{2n^2-3\sin n}{n^2+1} \geq \frac{2n^2-3}{n^2+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2n^2-3}{n^2+1} \leq u_n \leq \frac{2n^2+3}{n^2+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2-\frac{3}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}} \leq u_n \leq \frac{2+\frac{3}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2-\frac{3}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} 2+\frac{3}{n^2}=2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{n^2}=1$.

Par quotient : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2-\frac{3}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2+\frac{3}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}} = 2$ et par encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$

3) a) On sait que $\frac{2n^2-3}{n^2+1} \leq u_n \leq \frac{2n^2+3}{n^2+1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2n^2-3}{n^2+1}-2 \leq u_n-2 \leq \frac{2n^2+3}{n^2+1}-2$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2n^2-3}{n^2+1}-\frac{2\left(n^2+1\right)}{n^2+1} \leq u_n-2 \leq \frac{2n^2+3}{n^2+1}-\frac{2\left(n^2+1\right)}{n^2+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2n^2-3-2\left(n^2+1\right)}{n^2+1} \leq u_n-2 \leq \frac{2n^2+3-2\left(n^2+1\right)}{n^2+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2n^2-3-2n^2-2}{n^2+1} \leq u_n-2 \leq \frac{2n^2+3-2n^2-2}{n^2+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{-5}{n^2+1} \leq u_n-2 \leq \frac{1}{n^2+1}$$

b) La relation $\frac{-5}{n^2+1} \leq u_n-2 \leq \frac{1}{n^2+1}$ donne : $|u_n-2| \leq \left|\frac{-5}{n^2+1}\right| \quad \Leftrightarrow \quad |u_n-2| \leq \frac{5}{n^2+1}$

Ainsi : $\frac{5}{n^2+1} < 10^{-3} \quad \Leftrightarrow \quad 5 < 10^{-3}\left(n^2+1\right) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5}{10^{-3}} < n^2+1 \quad \Leftrightarrow \quad 5000-1 < n^2 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{4999} < n$

Soit $n > 70{,}7$: à partir du 71ème rang.

c) $u_n = \frac{2n^2-3\sin n}{n^2+1} = \frac{n^2\left(2-\frac{3\sin n}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{2-\frac{3\sin n}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}$

Le dénominateur est strictement positif

Or $-1 \leq \sin n \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{3}{n^2} \geq -\frac{3\sin n}{n^2} \geq \frac{3}{n^2}$

$-\frac{3\sin n}{n^2}$ n'est pas toujours négatif donc la suite $\left(u_n\right)$ n'est pas toujours inférieure à 2.

Exercice 6C.3

On considère la suite u définie par : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n$ et les suites v et w définies pour tout entier naturel n par : $v_n = u_{n+1} - u_n$ et $w_n = u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n$.

1) Démontrer que la suite v est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.
2) Quelle est la nature de la suite w ?
3) En déduire l'expression de w_n en fonction de n.
4) La suite u converge-t-elle ?

1) $v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n - u_{n+1} = -\frac{2}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n = -\frac{2}{3}(u_{n+1} - u_n) = -\frac{2}{3}v_n$

La suite (v_n) est géométrique de raison $q = -\frac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = u_1 - u_0 = 1$: $v_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n$.

2) $w_{n+1} = u_{n+2} + \frac{2}{3}u_{n+1} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n + \frac{2}{3}u_{n+1} = u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n = w_n$: la suite (w_n) est constante.

Tous les termes de la suite (w_n) sont égaux au premier terme : $w_0 = u_1 + \frac{2}{3}u_0 = 1$

3) Pour tout entier n, $w_n = 1$

Première méthode :

$$w_n = 1 \iff u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n = 1 \iff u_{n+1} = -\frac{2}{3}u_n + 1$$

Or $v_n = u_{n+1} - u_n$ avec $v_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n$ donc $u_{n+1} - u_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n \iff u_{n+1} = u_n + \left(-\frac{2}{3}\right)^n$

Ainsi $u_{n+1} = -\frac{2}{3}u_n + 1 \iff u_n + \left(-\frac{2}{3}\right)^n = -\frac{2}{3}u_n + 1 \iff u_n + \frac{2}{3}u_n = 1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^n$

$$\iff \frac{5}{3}u_n = 1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^n \iff u_n = \frac{3}{5}\left[1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^n\right]$$

$-1 < -\frac{2}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^n = 0$

Par produit : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{3}{5} \times 1 = 0,6$

Deuxième méthode : il faut être observateur :

$$v_n - w_n = (u_{n+1} - u_n) - \left(u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n\right) = u_{n+1} - u_n - u_{n+1} - \frac{2}{3}u_n = -\frac{5}{3}u_n$$

Or $v_n - w_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n - 1$

Ainsi : $-\frac{5}{3}u_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n - 1 \iff u_n = -\frac{3}{5}\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^n - 1\right] \iff u_n = \frac{3}{5}\left[1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^n\right]$

$-1 < -\frac{2}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^n = 0$

Par produit : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{3}{5} \times 1 = 0,6$

Exercice 6C.4 **VRAI / FAUX**

On considère une suite *u* positive et la suite *v* définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$.

1) *Pour tout entier naturel n,* $0 \leq v_n \leq 1$ *?*

$$v_n = \frac{u_n}{1+u_n} = u_n \times \frac{1}{1+u_n} = \frac{1}{\frac{1}{u_n}} \times \frac{1}{1+u_n} = \frac{1}{\frac{1}{u_n}+1}$$

Or pour tout n : $u_n > 0 \iff \dfrac{1}{u_n} > 0 \iff \dfrac{1}{u_n} + 1 > 1 \iff 0 < \dfrac{1}{\frac{1}{u_n}+1} < 1$: **VRAI**

2) *Si la suite u est convergente, alors la suite v est convergente ?*

Un contre exemple existe :

si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -1$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + 1 = 0$ et la suite (v_n) diverge.

Or tous les termes de la suite (u_n) sont positifs, donc cette situation est ici inenvisageable

Une démonstration est nécessaire :

Par hypothèse : il existe un réel L positif tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+u_n = 1+L$

Ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{1+u_n} = \dfrac{L}{1+L}$. L étant positif, le rapport $\dfrac{L}{1+L}$ est toujours défini : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{L}{1+L}$

→ **VRAI**

3) *Si la suite u est croissante, alors la suite v est croissante ?*

Si la suite (u_n) est croissante : $u_{n+1} - u_n \geq 0$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_{n+1}}{1+u_{n+1}} - \frac{u_n}{1+u_n} = \frac{u_{n+1}(1+u_n)}{(1+u_{n+1})(1+u_n)} - \frac{u_n(1+u_{n+1})}{(1+u_n)(1+u_{n+1})} = \frac{u_{n+1} + u_{n+1} \times u_{n+1} - u_n - u_n \times u_{n+1}}{(1+u_n)(1+u_{n+1})}$$

$$= \frac{u_{n+1} - u_n}{(1+u_n)(1+u_{n+1})}$$

Le dénominateur étant positif, $u_{n+1} - u_n \geq 0$, ainsi $v_{n+1} - v_n \geq 0$ et la suite (v_n) est croissante: **VRAI**

4) *Si la suite v est convergente, alors la suite u est convergente ?*

Soit L la limite de la suite (v_n) : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = L$.

La relation $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$ donne :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{1+u_n} = L \iff \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} L(1+u_n) \iff \lim_{n\to+\infty} u_n - Lu_n = L \iff \lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{L}{1-L}$$

Si la suite (v_n) converge vers 1, alors la suite (u_n) diverge vers l'infini, selon le signe du dénominateur

→**FAUX**

Exercice 6C.5 Soit a et b deux nombres réels strictement positifs.

On considère la suite (u_n) définie pour tout n $\in \mathbb{N}$ par : $u_n = \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$

a) Quelle est la limite de la suite (u_n) lorsque a = b ?

b) Exprimer u_n en fonction du quotient $\frac{a}{b}$. En déduire la limite de la suite (u_n) lorsque a < b ?

c) Quelle est la limite de la suite (u_n) lorsque a > b ? Justifier la réponse.

a) Si a = b, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n} = 0$ et donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n} = \frac{b^n\left(\frac{a^n}{b^n} - 1\right)}{b^n\left(\frac{a^n}{b^n} + 1\right)} = \frac{\frac{a^n}{b^n} - 1}{\frac{a^n}{b^n} + 1} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n - 1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n + 1}$$

Si a < b , alors $\frac{a}{b} < 1$ et donc $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^n = 0$

On en déduit que $\lim_{n \to +\infty} u_n = -1$

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n} = \frac{a^n\left(1 - \frac{b^n}{a^n}\right)}{a^n\left(1 + \frac{b^n}{a^n}\right)} = \frac{1 - \frac{b^n}{a^n}}{1 + \frac{b^n}{a^n}} = \frac{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^n}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n}$$

Si a > b , alors $\frac{b}{a} < 1$ et donc $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{b}{a}\right)^n = 0$

On en déduit que $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$

Exercice 6C.6

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 6$ et la relation : $u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2}$

1. *Déterminer la fonction f telle que : $u_{n+1} = f(u_n)$ et montrer que l'équation $f(x) = x$ a une solution α*
2. *Montrez que f est strictement croissante sur $]-2;+\infty[$.*
3. *Placer u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, sur l'axe des abscisses du graphique joint en annexe, sur lequel est tracé la courbe représentative de f.*
   Aucune justification n'est demandée mais on laissera les traits de construction.
4. *Donner une conjecture sur la convergence de la suite (u_n).*
5. *On pose : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$.*

   Montrer que : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} = \frac{1}{3} + v_n$
6. *a. Donner une expression de v_n en fonction de n.*
   b. En déduire une expression de u_n en fonction de n.
7. *Démontrer que la suite (u_n) converge vers un nombre que l'on précisera.*

1. Pour tout $x \in \mathbb{R} / \{-2\}$, on a : $f(x) = \dfrac{4x-1}{x+2}$

Résolvons l'équation $f(x) = x$:

Par équivalence successive on a :

$$\frac{4x-1}{x+2} = x$$
$$4x-1 = x^2+2x$$
$$0 = x^2+2x-4x+1$$
$$x^2-2x+1=0$$
$$(x-1)^2=0$$
$$x=1$$

2. *f* est dérivable sur $]-2;+\infty[$ en tant que fonction rationnelle définie sur cet intervalle.

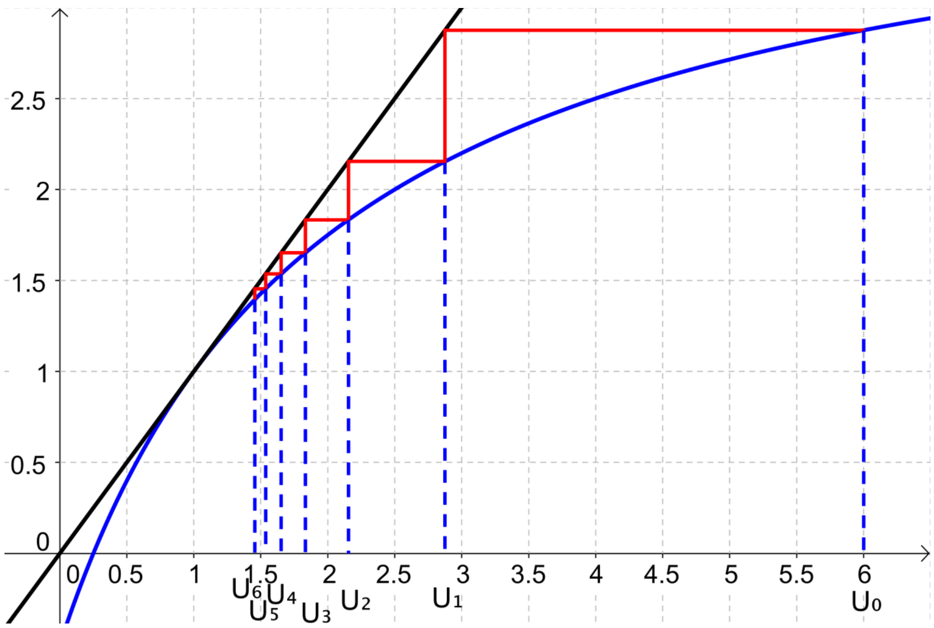
Pour tout $x \in]-2;+\infty[$ on a :

$$f'(x) = \frac{4(x+2)-(4x-1)\times 1}{(x+2)^2} = \frac{4x+8-4x+1}{(x+2)^2} = \frac{9}{(x+2)^2}$$

Il est clair que pour tout $x \in]-2;+\infty[$ on a : $f'(x) > 0$

Par conséquent *f* est strictement croissante sur $]-2;+\infty[$.

3.



4. Il semble que (u_n) converge vers 1.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}-1} = \frac{1}{\dfrac{4u_n-1}{u_n+2}-1} = \frac{1}{\dfrac{4u_n-1}{u_n+2} - \dfrac{u_n+2}{u_n+2}} = \frac{1}{\dfrac{4u_n-1-u_n-2}{u_n+2}} = \frac{1}{\dfrac{3u_n-3}{u_n+2}} = \frac{u_n+2}{3(u_n-1)}$$

$$= \frac{u_n-1+3}{3(u_n-1)} = \frac{u_n-1}{3(u_n-1)} + \frac{3}{3(u_n-1)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{u_n-1} = \frac{1}{3} + v_n$$

6. a. Ainsi (v_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = \frac{1}{u_0 - 1} = \frac{1}{6-1} = \frac{1}{5}$

Par conséquent : pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $v_n = v_0 + \frac{1}{3} \times n = \frac{1}{5} + \frac{n}{3} = \frac{5n+3}{15}$

b. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = \frac{1}{u_n - 1}$$
$$v_n \times (u_n - 1) = 1$$
$$v_n \times u_n - v_n = 1$$
$$v_n \times u_n = 1 + v_n$$
$$u_n = \frac{1+v_n}{v_n} = \frac{1}{v_n} + 1 = \frac{1}{\frac{5n+3}{15}} + 1 = \frac{15}{5n+3} + 1 = \frac{15}{5n+3} + \frac{5n+3}{5n+3} = \frac{5n+18}{5n+3}$$

7. On a : $\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

On en déduit que $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{v_n} = 0$ donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$

Exercice 6C.7

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n + 2 \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et } \begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = \frac{3}{5}v_n + 2 \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1) *Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n < v_n$.*

Initialisation : $u_0 = -1$ et $v_0 = 4$ donc $u_0 < v_0$: elle est vérifiée.

Hérédité : Supposons qu'il existe un rang n tel que $u_n < v_n$.

→ceci implique-t-il que l'on ait : $u_{n+1} < v_{n+1}$?

Par hypothèse : $u_n < v_n$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{5}u_n < \frac{3}{5}v_n$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{5}u_n + 2 < \frac{3}{5}v_n + 2$$
$$\Leftrightarrow u_{n+1} < v_{n+1}$$: l'hérédité est vérifiée.

Ainsi par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n < v_n$.

2) *Si les suites (u_n) et (v_n) ont des limites finies L et L', que peut-on dire de L et L' ?*

Si $\lim_{n \to +\infty} u_n = L$ et si $\lim_{n \to +\infty} v_n = L'$, alors $L \le L'$.

3) *En utilisant un tableur, conjecturer la limite de chacune des suites.*

	rang	suite (Un)		rang	suite (Vn)
1	rang	suite (Un)		rang	suite (Vn)
2	0	-1		0	4
3	1	1,4		1	4,4
4	2	2,84		2	4,64
5	3	3,704		3	4,784
6	4	4,2224		4	4,8704
7	5	4,53344		5	4,92224
8	6	4,720064		6	4,953344
9	7	4,8320384		7	4,9720064
10	8	4,89922304		8	4,98320384
11	9	4,939533824		9	4,989922304
12	10	4,963720294		10	4,993953382
13	11	4,978232177		11	4,996372029
14	12	4,986939306		12	4,997823218
15	13	4,992163584		13	4,998693931
16	14	4,99529815		14	4,999216358
17	15	4,99717889		15	4,999529815
18	16	4,998307334		16	4,999717889
19	17	4,9989844		17	4,999830733
20	18	4,99939064		18	4,99989844
21	19	4,999634384		19	4,999939064
22	20	4,99978063		20	4,999963438
23	21	4,999868378		21	4,999978063
24	22	4,999921027		22	4,999986838
25	23	4,999952616		23	4,999992103
26	24	4,99997157		24	4,999995262
27	25	4,999982942		25	4,999997157
28	26	4,999989765		26	4,999998294
29	27	4,999993859		27	4,999998977
30	28	4,999996315		28	4,999999386
31	29	4,999997789		29	4,999999632

Les suites (u_n) et (v_n) semblent toutes deux converger vers la valeur 5.

Exercice 6C.8

On considère la suite (u_n) définie pour $n \geq 1$ par $u_n = \dfrac{n+1}{2n+\sin n}$.

1) *En utilisant un tableur, conjecturer la limite de la suite (u_n).*

Par lecture du tableur ci-contre, la suite semble converger vers la valeur $\dfrac{1}{2}$.

Fichier | Accueil | Insertion | Mise en page

Couper | Copier | Reproduire la mise en forme | Coller | Presse-papiers

B37

	A	B
1	rang	suite (Un)
2	1	0,703860786
3	2	0,611085404
4	3	0,651346985
5	4	0,690302866
6	5	0,663637844
7	6	0,597239839
8	7	0,545814786
9	8	0,529743376
10	9	0,543120554
11	10	0,565378903
12	11	0,571428305
13	12	0,55405376
14	13	0,529898239
15	14	0,51740896
16	15	0,522017936
17	16	0,536073038
18	17	0,544817233
19	18	0,539022189
20	19	0,524248083
21	20	0,513284973
22	21	0,513578842
23	22	0,522832449
24	23	0,531516967
25	24	0,530848434
26	25	0,521380111
27	26	0,511726512
28	27	0,509495023
29	28	0,515364016
30	29	0,523228137
31	30	0,525317166

Fichier | Accueil | Insertion | Mise en page

Couper | Copier | Reproduire la mise en forme | Coller | Presse-papiers

B37

	A	B
71	70	0,504354889
72	71	0,503668897
73	72	0,506052445
74	73	0,509209718
75	74	0,510152533
76	75	0,507979902
77	76	0,504699249
78	77	0,503227364
79	78	0,504747249
80	79	0,507756336
81	80	0,509414382
82	81	0,508148622
83	82	0,505132792
84	83	0,503089314
85	84	0,503753884
86	85	0,506406858
87	86	0,5085443
88	87	0,508147152
89	88	0,505580133
90	89	0,503186655
91	90	0,503057048
92	91	0,505200303
93	92	0,507585029
94	93	0,507966103
95	94	0,505979215
96	95	0,503452685
97	96	0,502633416
98	97	0,504168113
99	98	0,506584011
100	99	0,507612169
101	100	0,506281819

2) *Démontrer que pour tout $n \geq 1$, on a $\dfrac{1}{2} < u_n$.*

(On dit que la suite (u_n) est minorée par $\dfrac{1}{2}$).

On remarque que

$$-1 \leq \sin n \leq 1 \text{ et } 2(n+1) = 2n+2$$

Ainsi : $-1 \leq \sin n \leq 1$

$$\Leftrightarrow 2n-1 \leq 2n+\sin n \leq 2n+1$$

$$\Leftrightarrow 2n-2 \leq 2n-1 \leq 2n+\sin n \leq 2n+1 \leq 2n+2$$

$$\Leftrightarrow 2n-2 \leq 2n+\sin n \leq 2n+2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2n-2} \geq \frac{1}{2n+\sin n} \geq \frac{1}{2n+2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n+1}{2n-2} \geq \frac{n+1}{2n+\sin n} \geq \frac{n+1}{2n+2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n+1}{2n-2} \geq u_n \geq \frac{1}{2}$$

La suite (u_n) est minorée par $\dfrac{1}{2}$.

3) *Démontrer qu'à partir d'un certain rang, on a $u_n < \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n} \Leftrightarrow u_n < \dfrac{n+2}{2n}$.*

$$u_n \leq \frac{n+1}{2n-2} \Leftrightarrow u_n \leq \frac{n-1+2}{2n-2} \Leftrightarrow u_n \leq \frac{n-1}{2n-2} + \frac{2}{2n-2} \Leftrightarrow u_n \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n-1} \Leftrightarrow u_n \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$$

$$-1 \leq \sin n \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 2n-1 \leq 2n+\sin n \leq 2n+1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2n-1} \geq \frac{1}{2n+\sin n} \geq \frac{1}{2n+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n+1}{2n-1} \geq \frac{n+1}{2n+\sin n} \geq \frac{n+1}{2n+1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n+1}{2n-1} \geq u_n \geq \frac{1}{2}.$$

Etude de $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)-\frac{n+1}{2n-1}=\frac{n+2}{2n}-\frac{n+1}{2n-1}=\frac{(n+2)(2n-1)}{2n(2n-1)}-\frac{(n+1)\times 2n}{2n-1}$

$$=\frac{2n^2-n+4n-2}{2n(2n-1)}-\frac{2n^2+2n}{2n-1}$$

$$=\frac{2n^2-n+4n-2-2n^2-2n}{2n(2n-1)}$$

$$=\frac{n-2}{2n(2n-1)}$$

Pour $n>2$: $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)-\frac{n+1}{2n-1}>0$

Donc $\frac{n+1}{2n-1}<\frac{1}{2}+\frac{1}{n}$ soit : $u_n<\frac{n+1}{2n-1}<\frac{1}{2}+\frac{1}{n}$.

4) *Justifier que* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\frac{1}{2}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2}+\frac{1}{n}=\frac{1}{2}$

D'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\frac{1}{2}$.

Exercice 6C.9

On considère la suite (u_n) *définie par* $u_n=\frac{3n-1}{n+1}$.

1) *Donner, en utilisant une calculatrice, des valeurs décimales approchées de* u_0, u_1, ... , u_{10} *et* u_{100}.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	100
u_n	−1	1	1,667	2	2,2	2,333	2,43	2,5	2,56	2,6	2,64	2,96

2) *Montrer que pour tout* $n\in\mathbb{N}$ *, on a* $-1\leq u_n\leq 3$.

$$3-u_n=3-\frac{3n-1}{n+1}=\frac{3(n+1)}{n+1}-\frac{3n-1}{n+1}=\frac{3n+3-3n+1}{n+1}=\frac{4}{n+1} \quad \text{donc } 3-u_n>0 \text{ et } u_n\leq 3$$

$$u_n-(-1)=\frac{3n-1}{n+1}+1=\frac{3n-1}{n+1}+\frac{n+1}{n+1}=\frac{3n-1+n+1}{n+1}=\frac{4n}{n+1} \quad \text{donc } u_n+1\geq 0 \text{ et } u_n\geq -1$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $-1\leq u_n\leq 3$: la suite (u_n) est minorée par -1 et majorée par 3.

3) *Étudier le sens de variation de la suite* (u_n).

La fonction associée à cette fonction est : $f(x)=\frac{3x-1}{x+1}$.

Cette fonction est dérivable sur $[0;+\infty[$ comme quotient de fonctions polynômiales.

$$\forall x\in[0;+\infty[\ : \ f'(x)=\frac{3(x+1)-(3x-1)\times 1}{(x+1)^2}=\frac{3x+3-3x+1}{(x+1)^2}=\frac{4}{(x+1)^2}$$

La dérivée est strictement positive donc la fonction est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

La suite (u_n) est strictement croissante.

4) *Démontrer que pour n suffisamment grand on a* $u_n > 2{,}999$.

Que peut-on penser de la limite de (u_n) ?

$$u_n = \frac{3n-1}{n+1} = \frac{3(n+1)-4}{n+1} = 3 - \frac{4}{n+1}$$

$$u_n > 2{,}999 \iff 3-\frac{4}{n+1} > 2{,}999 \iff 3-2{,}999 > \frac{4}{n+1} \iff 0{,}001 > \frac{4}{n+1}$$

$$\iff \frac{1}{0{,}001} < \frac{n+1}{4} \iff \frac{4}{0{,}001} < n+1 \iff 4000 < n+1 \iff 3999 < n$$

Ainsi si $n > 3999$: $u_n > 2{,}999$.

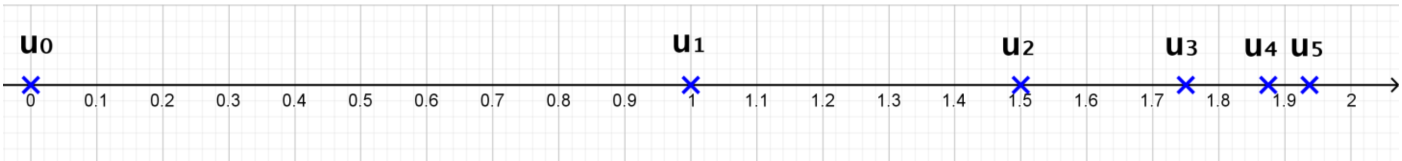
Cette suite croissante majorée semble converger vers la valeur 3.

Exercice 6C.10

On considère la suite (u_n) *définie par* $u_0 = 0$ *et* $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

1) *Calculer* u_1, u_2, u_3, u_4 *et* u_5. *Placer les points correspondants sur une droite graduée.*

$u_1 = 1$, $u_2 = 1{,}5$, $u_3 = 1{,}75$, $u_4 = 1{,}875$, $u_5 = 1{,}9375$



2) *Démontrer que la suite* (u_n) *est majorée.*

Lors d'une expression de suite par récurrence, il est habituel de tester une démonstration par récurrence
Il semble que la suite soit majorée par la valeur 2.

Initialisation : $u_0 = 0$ donc $u_0 \le 2$

Hérédité : supposons qu'il existe un rang n tel que : $u_n \le 2$; cela implique-t-il que $u_{n+1} \le 2$?

Par hypothèse : $u_n \le 2$

$$\iff \frac{1}{2}u_n \le \frac{1}{2}\times 2$$

$$\iff \frac{1}{2}u_n + 1 \le 1+1$$

$\iff u_{n+1} \le 2$: l'hérédité est vérifiée.

Par récurrence pour tout entier n : $u_n \le 2$ donc la suite (u_n) est majorée par la valeur 2.

3) *Démontrer que la suite* (u_n) *est croissante.*

$$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{1}{2}u_n + 1\right) - u_n = -\frac{1}{2}u_n + 1$$

Or $u_n \le 2 \iff -\frac{1}{2}u_n \ge -\frac{1}{2}\times 2 \iff -\frac{1}{2}u_n + 1 \ge -1+1 \iff -\frac{1}{2}u_n + 1 \ge 0$

Ainsi : $u_{n+1} - u_n \ge 0$ donc la suite (u_n) est croissante.

4) *Justifier que la suite* (u_n) *a une limite finie. Que peut-on penser de la valeur de cette limite ?*

Toute suite croissance majorée admet une limite finie. Donc la suite (u_n) admet une limite L.

Sachant que $\lim_{n\to+\infty} u_n = L$, on a aussi : $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = L$

La relation de récurrence $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+1$ permet de penser que : $L=\frac{1}{2}L+1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}L=1 \Leftrightarrow L=2$.

On peut penser que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=2$.

Exercice 6C.11 *On considère la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}=\sqrt{2u_n+3}$.*

1) *Donner des valeurs approchées à 10^{-3} près de u_1, u_2, ... , u_{10}.*

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_n	1	2,236	2,734	2,910	2,970	2,990	2,997	2,999	3	3	3

2) *Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $0\le u_n\le 3$.*

Initialisation : $u_0=1$ donc $0\le u_0\le 3$

Hérédité : supposons qu'il existe un rang n tel que : $0\le u_n\le 3$; cela implique-t-il que $0\le u_{n+1}\le 3$?

Par hypothèse : $0\le u_n\le 3$

$\Leftrightarrow 2\times 0\le 2\times u_n\le 2\times 3$

$\Leftrightarrow 0+3\le 2u_n+3\le 6+3$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\le\sqrt{2u_n+3}\le\sqrt{9}$ car la fonction racine carrée est une fonction croissante

$\Leftrightarrow 0\le\sqrt{3}\le u_{n+1}\le 3$

Par récurrence, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $0\le u_n\le 3$.

3) *Démontrer que la suite (u_n) est croissante.*

$$u_{n+1}-u_n=\sqrt{2u_n+3}-u_n=\left(\sqrt{2u_n+3}-u_n\right)\times\frac{\left(\sqrt{2u_n+3}+u_n\right)}{\left(\sqrt{2u_n+3}+u_n\right)}=\frac{\left(\sqrt{2u_n+3}\right)^2-u_n^{\ 2}}{\left(\sqrt{2u_n+3}+u_n\right)}=\frac{-u_n^{\ 2}+2u_n+3}{\left(\sqrt{2u_n+3}+u_n\right)}$$

Or $0\le u_n\le 3$ donc le dénominateur est positif.

Considérons le trinôme $-x^2+2x+3$.

Son discriminant est $\Delta=2^2-4\times(-1)\times 3=4+12=16=4^2$.

Ses racines sont $x_1=\frac{-2-4}{2\times(-1)}=\frac{-6}{-2}=3$ et $x_2=\frac{-2+4}{2\times(-1)}=\frac{2}{-2}=-1$.

Les résultats sur le signe d'un trinôme du second degré permettent alors d'affirmer que pour tout $x\in[-1;3]$: $-x^2+2x+3\ge 0$.

Or $0\le u_n\le 3$ donc $u_n\in[-1;3]$ et $-u_n^{\ 2}+2u_n+3\ge 0$.

Ainsi pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}-u_n\ge 0$ et la suite (u_n) est croissante.

4) *Justifier que la suite (u_n) a une limite finie. Quelle est cette limite ?*

La suite (u_n) est croissante et majorée par 3, donc (u_n) a une limite finie.

Sachant que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=L$, la relation de récurrence $u_{n+1}=\sqrt{2u_n+3}$ permet d'obtenir la relation :

$L=\sqrt{2L+3} \Leftrightarrow L^2=2L+3 \Leftrightarrow L^2-2L-3=0$

Son discriminant est $\Delta=(-2)^2-4\times 1\times(-3)=4+12=16=4^2$.

Ses racines sont $L_1=\frac{-(-2)-4}{2\times 1}=\frac{-2}{2}=-1$ et $L_2=\frac{-(-2)+4}{2\times 1}=\frac{6}{2}=3$.

La suite (u_n) étant minorée par 0, sa limite est nécessairement positive.

On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=3$.

Exercice 6C.12

Soit (u_n) *et* (v_n) *les suites définies, pour tout* $n\in\mathbb{N}$ *par :* $u_0=9$, $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n-3$ *et* $v_n=u_n+6$.

1) a) *Montrer que* (v_n) *est une suite géométrique à termes positifs*

b) *Calculer la somme* $S_n=\sum_{k=0}^{n} v_k$ *puis la somme* $S'_n=\sum_{k=0}^{n} u_k$

c) *Déterminer les limites de* (S_n) *et* (S'_n).

2) *On définit la suite* (w_n) *par* $w_n=\ln v_n$ *, pour tout entier* $n\in\mathbb{N}$.

Montrer que (w_n) *est une suite arithmétique*

Calculer $S''_n=\sum_{k=0}^{n} w_k$ *et déterminer la limite de* (S''_n)

3) *Calculer le produit* $P_n=v_0\times v_1\times\ldots\times v_n$ *en fonction de n*

En déduire la limite de (P_n).

1) a) $v_{n+1}=u_{n+1}+6=\frac{1}{2}u_n-3+6=\frac{1}{2}u_n+3=\frac{1}{2}(u_n+6)=\frac{1}{2}v_n$

donc (v_n) **est une suite géométrique** de raison $q=\frac{1}{2}$ et de 1er terme $v_0=u_0+6=9+6=15$

ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n=15\times\frac{1}{2^n}$, ainsi pour tout $n\in\mathbb{N}$, (V_n) **est à termes positifs**

b) $S_n=\sum_{k=0}^{n} V_k=V_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=15\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}=15\times\frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2}}=30\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)$

$S'_n=\sum_{k=0}^{n} U_k=(V_0-6)+(V_1-6)+\ldots+(V_n-6)=S'_n-6(n+1)=30\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)-6(n+1)$

$S'_n=30-\frac{30}{2^{n+1}}-6n-6=24-\frac{30}{2^{n+1}}-6n=6\left(4-\frac{5}{2^{n+1}}-n\right)$

c) On a : $0<\frac{1}{2}<1$ donc $0<\frac{1}{2}<1$ $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^{n+1}}=0$, ainsi : $\lim_{n\to+\infty} S_n=30$

et $\lim_{n\to+\infty} S'_n=\lim_{n\to+\infty}\left[S_n-6(n+1)\right]=-\infty$

2) $W_{n+1}-W_n=\ln V_{n+1}-\ln V_n=\ln\frac{V_{n+1}}{V_n}=\ln\frac{1}{2}=-\ln 2$

donc (W_n) **est une suite arithmétique** de raison $r=-\ln 2$ et de 1e terme :

$W_0=\ln V_0=\ln 15$

ainsi : $W_n=W_n+nr=\ln 15-n\ln 2$

$S''_n=W_0+W_1+\ldots+W_n=(n+1)\frac{W_0+W_n}{2}=(n+1)\frac{\ln 15+\ln 15-n\ln 2}{2}=\frac{(n+1)(2\ln 15-n\ln 2)}{2}$

on a : $\lim_{n\to+\infty} n+1=+\infty$ et $\lim_{n\to+\infty}(2\ln 15-n\ln 2)=-\infty$

Donc $\lim_{n\to+\infty} S''_n=-\infty$

3) on cherche $P_n=V_0V_1\ldots V_n$

or $S''_n = \ln V_0 + \ln V_1 + ... + \ln V_n = \ln\left(V_0 V_1 ... V_n\right) = \ln P_n$

donc $P_n = e^{S''_n}$ avec $\lim\limits_{n \to +\infty} S''_n = -\infty$

donc, en posant $X = S''_n$

$$\lim_{n \to +\infty} P_n = \lim_{n \to +\infty} e^{S''_n} = \lim_{X \to -\infty} e^X = 0$$