Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Exercice 6D.1

On considère la suite *u* définie par :

$$u_0 = 0,\ u_1 = 1 \text{ et pour tout entier } n \geq 0,\ u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n$$

et les suites *v* et *w* définies pour tout entier naturel *n* par :

$$v_n = u_{n+1} - u_n \quad \text{et} \quad w_n = u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n .$$

1) Démontrer que la suite *v* est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.
2) Quelle est la nature de la suite *w* ?
3) En déduire l'expression de w_n en fonction de *n*.
4) La suite *u* converge-t-elle ?

Exercice 6D.2

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 0,\ u_1 = 1 \text{ et pour tout entier } n \geq 0,\ u_{n+1} = 7u_n + 8u_{n-1}$$

1) Déterminer les cinq premiers termes de la suite (u_n).
2) Montrer que la suite (s_n) définie par $s_n = u_{n+1} + u_n$ pour tout entier $n \geq 0$, est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.
   En déduire s_n en fonction de n.
3) a) On pose $v_n = (-1)^n u_n$ et on considère la suite $t_n = v_{n+1} - v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Exprimer t_n en fonction de s_n.
   b) Quelle est la nature de la suite (t_n) ?
4) a) Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de *n*.
   b) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{8^n}$

Exercice 6D.3 (vers la prépa)

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1,\ u_1 = 3 \text{ et pour tout entier } n \geq 0,\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n .$$

Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, $u_n = 2^{n+1} - 1$.

Exercice 6D.4 (vers la prépa)

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 0,\ u_1 = 1 \text{ et pour tout entier } n \geq 0,\ u_{n+2} = -u_{n+1} + 2u_n .$$

Déterminer l'expression générale de la suite (u_n).

Exercice 6C.1

On considère la suite u définie par : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n$ et les suites v et w définies pour tout entier naturel n par : $v_n = u_{n+1} - u_n$ et $w_n = u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n$.

1) Démontrer que la suite v est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.
2) Quelle est la nature de la suite w ?
3) En déduire l'expression de w_n en fonction de n.
4) La suite u converge-t-elle ?

1) $v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n - u_{n+1} = -\frac{2}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n = -\frac{2}{3}(u_{n+1} - u_n) = -\frac{2}{3}v_n$

La suite (v_n) est géométrique de raison $q = -\frac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = u_1 - u_0 = 1$: $v_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n$.

2) $w_{n+1} = u_{n+2} + \frac{2}{3}u_{n+1} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n + \frac{2}{3}u_{n+1} = u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n = w_n$: la suite (w_n) est constante.

Tous les termes de la suite (w_n) sont égaux au premier terme : $w_0 = u_1 + \frac{2}{3}u_0 = 1$

3) **Première méthode :** Pour tout entier n, $w_n = 1$

$$w_n = 1 \Leftrightarrow u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n = 1 \Leftrightarrow u_{n+1} = -\frac{2}{3}u_n + 1$$

Or $v_n = u_{n+1} - u_n$ avec $v_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n$ donc $u_{n+1} - u_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n \Leftrightarrow u_{n+1} = u_n + \left(-\frac{2}{3}\right)^n$

Ainsi $u_{n+1} = -\frac{2}{3}u_n + 1 \Leftrightarrow u_n + \left(-\frac{2}{3}\right)^n = -\frac{2}{3}u_n + 1 \Leftrightarrow u_n + \frac{2}{3}u_n = 1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^n$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{3}u_n = 1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^n \Leftrightarrow u_n = \frac{3}{5}\left[1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^n\right]$$

$-1 < -\frac{2}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^n = 0$

Par produit : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{3}{5} \times 1 = 0,6$

Deuxième méthode : il faut être observateur :

$$v_n - w_n = (u_{n+1} - u_n) - \left(u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n\right) = u_{n+1} - u_n - u_{n+1} - \frac{2}{3}u_n = -\frac{5}{3}u_n$$

Or $v_n - w_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n - 1$

Ainsi : $-\frac{5}{3}u_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n - 1 \Leftrightarrow u_n = -\frac{3}{5}\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^n - 1\right] \Leftrightarrow u_n = \frac{3}{5}\left[1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^n\right]$

$-1 < -\frac{2}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^n = 0$

Par produit : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{3}{5} \times 1 = 0,6$

Exercice 6D.2

On considère la suite (u_n) *définie par :*

$$u_0 = 0,\ u_1 = 1 \text{ et pour tout entier } n \geq 0,\ u_{n+1} = 7u_n + 8u_{n-1}$$

1) *Déterminer les cinq premiers termes de la suite* (u_n).

$$u_2 = u_{1+1} = 7u_1 + 8u_{1-1} = 7\times 1 + 8\times 0 = 7$$
$$u_3 = u_{2+1} = 7u_2 + 8u_{2-1} = 7\times 7 + 8\times 1 = 57$$
$$u_4 = u_{3+1} = 7u_3 + 8u_{3-1} = 7\times 57 + 8\times 7 = 399 + 56 = 455$$

2) *Montrer que la suite* (s_n) *définie par* $s_n = u_{n+1} + u_n$ *pour tout entier* $n \geq 0$, *est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison. En déduire* s_n *en fonction de* n.

$$s_{n+1} = u_{n+2} + u_{n+1} = 7u_{n+1} + 8u_n + u_{n+1} = 8u_{n+1} + 8u_n = 8(u_{n+1} + u_n) = 8s_n$$

La suite (s_n) est géométrique de raison 8 et de premier terme :

$$s_0 = u_1 + u_0 = 1.$$

L'expression de la suite (s_n) est, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$s_n = 8^n.$$

3) **a)** *On pose* $v_n = (-1)^n u_n$ *et on considère la suite* $t_n = v_{n+1} - v_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Exprimer t_n *en fonction de* s_n.

$$t_n = v_{n+1} - v_n = (-1)^{n+1} u_{n+1} - (-1)^n u_n = (-1)^{n+1} u_{n+1} + (-1)\times(-1)^n u_n$$
$$= (-1)^{n+1} u_{n+1} + (-1)^{n+1} u_n = (-1)^{n+1}(u_{n+1} + u_n) = (-1)^{n+1} s_n$$

b) *Quelle est la nature de la suite* (t_n) *?*

D'après ce qui précède, l'expression de la suite (t_n) est, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$t_n = (-1)^{n+1} s_n = (-1)^{n+1} \times 8^n = -(-8)^n$$

La suite (t_n) est géométrique de raison -8.

4) **a)** *Exprimer* v_n, *puis* u_n, *en fonction de n.*

D'après ce qui précède, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$t_n = (-8)^{n+1} \quad \text{et} \quad t_n = v_{n+1} - v_n$$

Donc :

$$v_{n+1} - v_n = -(-8)^n \iff v_{n+1} = v_n - (-8)^n$$

avec :

$$v_0 = (-1)^0 u_0 = 0$$

et : $v_1 = (-1)^1 u_1 = -1$

puis : $v_2 = v_1 - (-8)^1 = -1 - (-8)^1$

$$v_3 = v_2 - (-8)^2 = -1 - (-8)^1 - (-8)^2$$
$$v_4 = v_3 - (-8)^3 = -1 - (-8)^1 - (-8)^2 - (-8)^3$$

Ainsi pour tout entier $n \geq 1$:

$$v_n = -1 - (-8)^1 - (-8)^2 - \ldots - (-8)^n = -\left[1 + (-8)^1 + (-8)^2 + \ldots + (-8)^n\right].$$

On reconnait la somme des termes d'une suite géométrique de raison -8. Ainsi :

$$v_n = 1\times\frac{1-(-8)^{n+1}}{1-(-8)} = \frac{1-(-8)^{n+1}}{1+8} = \frac{1}{9}\left[1-(-8)^{n+1}\right]$$

La relation $v_n = (-1)^n u_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ donne :

$$u_n = (-1)^n v_n \quad \text{soit : } \quad \boxed{u_n = (-1)^n \times \frac{1}{9}\left[1-(-8)^{n+1}\right]}$$

b) *Déterminer* $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{8^n}$.

$$\frac{u_n}{8^n} = \frac{1}{8^n}\times(-1)^n\times\frac{1}{9}\left[1-(-8)^{n+1}\right] = \frac{(-1)^n}{9}\left[\frac{1}{8^n}-\frac{(-8)^{n+1}}{8^n}\right] = \frac{(-1)^n}{9}\left[\frac{1}{8^n}-(-1)^{n+1}\times 8\right]$$

$8>1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{8^n}=0$. Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{8^n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n}{9}\left[(-1)^{n+2}\times 8\right] = \lim_{n\to+\infty}\frac{8}{9}\times(-1)^{2n+2}\boxed{=\frac{8}{9}}$$

Exercice 6D.3 (vers la prépa)

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0=1$, $u_1=3$ et pour tout entier $n\geq 0$, $u_{n+2}=3u_{n+1}-2u_n$.

Montrer que pour tout entier $n\geq 0$, $u_n = 2^{n+1}-1$.

En écrivant : $u_{n+2}-3u_{n+1}+2u_n=0$, on obtient l'équation caractéristique de cette suite :

$$x^2-3x+2=0$$

Le discriminant Δ vaut 1, d'où deux solutions : $\frac{3-1}{2}=1$ et $\frac{3+1}{2}=2$.

Théorème de prépa : $\Delta>0$: il existe deux réels *a* et *b* tels que :

pour tout entier $n\geq 0$, $u_n = a\times 1^n + b\times 2^n$

Or on sait que : $u_0=1$, $u_1=3$, donc :

$$\begin{cases} a\times 1^0+b\times 2^0=1 \\ a\times 1^1+b\times 2^1=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ a+2b=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1-b \\ 1-b+2b=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1-b=1-2=-1 \\ b=3-1=2\end{cases}$$

Ainsi, pour tout entier $n\geq 0$:

$$u_n = -1\times 1^n + 2\times 2^n = 2^{n+1}-1.$$

Exercice 6D.4 (vers la prépa)

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0=0$, $u_1=1$ et pour tout entier $n\geq 0$, $u_{n+2}=-u_{n+1}+2u_n$.

Déterminer l'expression générale de la suite (u_n).

En écrivant : $u_{n+2}+u_{n+1}-2u_n=0$, on obtient l'équation caractéristique de cette suite :

$$x^2+x-2=0$$

Le discriminant Δ vaut 9, d'où deux solutions : $\frac{-1-3}{2}=-2$ et $\frac{-1+3}{2}=1$.

Théorème de prépa : $\Delta>0$: il existe deux réels *a* et *b* tels que :

pour tout entier $n\geq 0$, $u_n = a\times(-2)^n + b\times 1^n$

Or on sait que : $u_0=0$, $u_1=1$, donc :

$$\begin{cases} a\times(-2)^0+b\times 1^0=0 \\ a\times(-2)^1+b\times 1^1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ -2a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-b \\ -2\times(-b)+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{1}{3} \\ b=\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Ainsi, pour tout entier $n\geq 0$:

$$u_n=-\frac{1}{3}\times(-2)^n+\frac{1}{3}\times 1^n=-\frac{1}{3}\left[(-2)^n-1\right].$$