Exercice 7A.1

On considère la suite (v_n) définie par : $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \dfrac{9}{6-v_n} \end{cases}$.

1) Ecrire un programme python affichant les termes du rang 0 au rang *n*.
   Calculer v_{10}.
2) a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel *n* : $0 < v_n < 3$.

   b) Démontrer que, pour tout entier naturel *n* : $v_{n+1} - v_n = \dfrac{(3-v_n)^2}{6-v_n}$.

   La suite (v_n) est-elle monotone ?

   c) Démontrer que la suite (v_n) est convergente.
3) On considère la suite (w_n) définie par : $w_n = \dfrac{1}{v_n - 3}$.

   a) Démontrer que (w_n) est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

   b) En déduire l'expression de (w_n), puis celle de (v_n) en fonction de *n*.

   c) Déterminer la limite de la suite (v_n).

Exercice 7A.2

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{n+1}{2n} \times u_n \end{cases}$.

1) Calculer u_2, u_3 et u_4.
2) a) Démontrer que, pour tout entier naturel *n* non nul, u_n est strictement positif.

   b) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

   c) Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?

   d) Déterminer la valeur de l'éventuelle limite de la suite (u_n).

Exercice 7A.3

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{1+3u_n}{3+u_n}$.

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1) Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.
2) a) Etablir que, pour tout entier naturel *n*, on a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n}$.

   b) Déterminer la monotonie de la suite (u_n).

Exercice 7A.4

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n + 2n^2 - n$.

On pose la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = u_n + 2n^2 + 3n + 5$.

1) Voici un extrait de tableur :

	A	B	C
1	*n*	*u*	*v*
2	0	2	7
3	1	4	14
4	2	9	28
5	3	24	56
6	4	63	
7			
8			
9			
10			

Quelles formules a-t-on écrites dans les cellules C2 et B3 et copiées vers le bas pour afficher les termes des suites *u* et *v* ?

2) Déterminer une expression de v_n et de u_n en fonction de *n* uniquement.

Exercice 7A.5

On veut étudier les suites de termes positifs telles que $u_0 > 1$ et possédant la propriété suivante :

pour tout $n > 0$, la somme des *n* premiers termes est égale au produit de ces termes.

On admet qu'une telle suite (u_n) existe. Elle vérifie donc trois propriétés :

- $u_0 > 1$
- pour tout $n \geq 0$, $u_n \geq 0$
- pour tout $n > 0$, et $u_0 + u_1 + ... + u_{n-1} = u_0 \times u_1 \times ... \times u_{n-1}$.

1) On choisit $u_0 = 3$. Déterminer u_1 et u_2.
2) Pour $n > 0$, on note $s_n = u_0 + u_1 + ... + u_{n-1} = u_0 \times u_1 \times ... \times u_{n-1}$.

   On a en particulier : $s_1 = u_0$.

   a) Vérifier que pour tout entier $n > 0$, $s_{n+1} = s_n + u_n$ et $s_n > 1$.

   b) En déduire que pour tout entier $n > 0$, $u_n = \dfrac{s_n}{s_n - 1}$.

   c) Montrer que pour tout $n \geq 0$, $u_n > 1$.

3) L'algorithme suivant calcule le terme u_n pour une valeur de *n* donnée.

   a) Compléter le programme python.

   b) Le tableau ci-dessous donne des valeurs arrondies au millième de u_n pour différentes valeurs de l'entier *n* :

```
n = int(input("Rang :"))
u = eval(input("Valeur initiale :"))
s = u
for i in range (n):
    u = ...........
    s =  ...........
print(n , u)
```

n	0	5	10	20	30	40
u_n	3	1,140	1,079	1,043	1,030	1,023

Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite (u_n) ?

4) a) Justifier que pour tout entier $n > 0$, $s_n > n$.

   b) En déduire la limite de la suite (s_n) puis celle de la suite (u_n).

Exercice 7A.1

On considère la suite (v_n) *définie par :* $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \dfrac{9}{6 - v_n} \end{cases}$.

1) *Ecrire un programme python affichant les termes du rang 0 au rang n. Calculer* v_{10}.

```
V = 1
n = int(input("Rang :"))
for i in range (n):
   V = 9 / (6-V)
print(n , V)
```

On obtient : $v_{10} \simeq 2.739130434782609$ et $v_{1000} \simeq 2.9970044932601096$

2) a) *Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :* $0 < v_n < 3$.

Initialisation : $v_0 = 1$ donc : $0 < v_0 < 3$ →ok

Hérédité : supposons qu'il existe un rang $n \in \mathbb{N}$ tel que $0 < v_n < 3$

→cela implique-t-il $0 < v_{n+1} < 3$?

Par hypothèse :

$$\begin{aligned} & 0 < v_n < 3 \\ \Leftrightarrow\ & 0 > -v_n > -3 \\ \Leftrightarrow\ & 0+6 > -v_n + 6 > -3+6 \\ \Leftrightarrow\ & 6 > 6 - v_n > 3 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{6} < \frac{1}{6 - v_n} < \frac{1}{3} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{6} \times 9 < \frac{1}{6 - v_n} \times 9 < \frac{1}{3} \times 9 \\ \Leftrightarrow\ & 1{,}5 < v_{n+1} < 3 \end{aligned}$$

Ainsi : $0 < v_{n+1} < 3$ →l'hérédité est vérifiée.

Par récurrence, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $0 < v_n < 3$.

b) *Démontrer que, pour tout entier naturel n :* $v_{n+1} - v_n = \dfrac{(3 - v_n)^2}{6 - v_n}$.

La suite (v_n) *est-elle monotone ?*

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{9}{6 - v_n} - v_n = \frac{9}{6 - v_n} - v_n \times \frac{6 - v_n}{6 - v_n} = \frac{9 - 6v_n + v_n^2}{6 - v_n} = \frac{(3 - v_n)^2}{6 - v_n}$$

Or $0 < v_n < 3$ donc : $6 - v_n > 0$.

Ainsi : $v_{n+1} - v_n > 0$ et la suite (v_n) est croissante pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) *Démontrer que la suite* (v_n) *est convergente.*

La suite (v_n) est croissante et majorée : elle est convergente.

3) *On considère la suite* (w_n) *définie par :* $w_n = \dfrac{1}{v_n - 3}$.

a) *Démontrer que (w_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$.*

$$w_{n+1}-w_n=\frac{1}{v_{n+1}-3}-\frac{1}{v_n-3}=\frac{1}{\frac{9}{6-v_n}-3}-\frac{1}{v_n-3}=\frac{1}{\frac{9}{6-v_n}-\frac{3(6-v_n)}{6-v_n}}-\frac{1}{v_n-3}$$

$$=\frac{1}{\frac{9-18+3v_n}{6-v_n}}-\frac{1}{v_n-3}=\frac{1}{\frac{3v_n-9}{6-v_n}}-\frac{1}{v_n-3}=\frac{6-v_n}{3(v_n-3)}-\frac{1}{v_n-3}$$

$$=\frac{6-v_n}{3(v_n-3)}-\frac{3}{3(v_n-3)}=\frac{6-v_n-3}{3(v_n-3)}=\frac{3-v_n}{3(v_n-3)}=\frac{-(v_n-3)}{3(v_n-3)}=-\frac{1}{3}$$

(w_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$ et de premier terme $w_0=\frac{1}{v_0-3}=\frac{1}{1-3}=-\frac{1}{2}$.

b) *En déduire l'expression de (w_n), puis celle de (v_n) en fonction de n.*

Pour tout entier $n\in\mathbb{N}$:

$$w_n=w_0+nr=-\frac{1}{2}-\frac{n}{3}=\frac{-2n-3}{6}$$

Or : $w_n=\frac{1}{v_n-3} \Leftrightarrow \frac{1}{w_n}=v_n-3 \Leftrightarrow \frac{1}{w_n}+3=v_n \Leftrightarrow v_n=\frac{3w_n+1}{w_n}$

Soit : $v_n=\frac{3w_n+1}{w_n}=\frac{3\times\frac{-2n-3}{6}+1}{\frac{-2n-3}{6}}=\frac{6}{-2n-3}\times\frac{-6n-9+6}{6}=\frac{-6n-3}{-2n-3}=\frac{6n+3}{2n+3}$

Vérification : pour $n=10$, on obtient : $v_{10}=\frac{63}{23}\simeq 2.739130435$

c) *Déterminer la limite de la suite (v_n).*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{6n+3}{2n+3}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n\left(6+\frac{3}{n}\right)}{n\left(2+\frac{3}{n}\right)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{6+\frac{3}{n}}{2+\frac{3}{n}}$$

Par quotient et somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=3$

Exercice 7A.2

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_1=\frac{1}{2} \\ u_{n+1}=\frac{n+1}{2n}\times u_n \end{cases}$.

1) *Calculer u_2, u_3 et u_4.*

$$u_2=\frac{1}{2}\quad;\quad u_3=\frac{3}{8}\quad;\quad u_4=\frac{1}{4}$$

2) a) *Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, u_n est strictement positif.*

Initialisation : $u_1=\frac{1}{2}$ donc $u_1>0$ → l'initialisation est vérifiée

Hérédité : Supposons qu'il existe un rang $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $u_n>0$, cela implique-t-il $u_{n+1}>0$?

Par hypothèse : $n \geq 1$ et $u_n > 0$

Donc : $\frac{n+1}{2n} > 0$ et $\frac{n+1}{2n} \times u_n > 0$: l'hérédité est vérifiée.

Par récurrence, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$.

b) *Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.*

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{2n} \times u_n - u_n = \left(\frac{n+1}{2n} - 1\right) u_n = \left(\frac{n+1}{2n} - \frac{2n}{2n}\right) u_n = \frac{1-n}{2n} \times u_n$$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$.

$n \geq 1 \iff 1 - n \leq 0$.

Ainsi pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n$ et la suite (u_n) est décroissante.

c) *Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?*

La suite (u_n) est décroissante et minorée, elle est convergente.

d) *Déterminer la valeur de l'éventuelle limite de la suite (u_n).*

Soit L la limite cherchée :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = \text{L}$$

Or : $\displaystyle \lim_{n \to +\infty} \frac{n+1}{2n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{2n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2}$

Ainsi en utilisant la relation $u_{n+1} = \frac{n+1}{2n} \times u_n$, on obtient :

$$\text{L} = \frac{1}{2} \times \text{L} \iff \text{L} - \frac{1}{2} \times \text{L} = 0 \iff \frac{1}{2} \times \text{L} = 0 \iff \text{L} = 0.$$

La suite (u_n) converge vers 0.

Exercice 7A.3

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1+3u_n}{3+u_n}$.

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1) *Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.*

Initialisation : $u_0 = 2$ donc $u_0 > 1$ →l'initialisation est vérifiée

Hérédité : Supposons qu'il existe un rang $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_n > 1$, cela implique-t-il $u_{n+1} > 1$?

$$u_{n+1} = \frac{1+3u_n}{3+u_n} = \frac{9+3u_n-8}{3+u_n} = \frac{3(3+u_n)-8}{3+u_n} = 3 - \frac{8}{3+u_n}$$

Or par hypothèse : $u_n > 1$:

$$3 + u_n > 3 + 1 \iff \frac{1}{3+u_n} < \frac{1}{4} \iff -\frac{1}{3+u_n} > -\frac{1}{4} \iff -\frac{8}{3+u_n} > -\frac{8}{4}$$

$$\iff 3 - \frac{8}{3+u_n} > 3 - 2 \iff u_{n+1} > 1$$ →l'hérédité est vérifiée.

Par récurrence, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.

2) **a)** *Etablir que, pour tout entier naturel n, on a :* $u_{n+1}-u_n=\dfrac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n}$.

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1+3u_n}{3+u_n}-u_n=\frac{1+3u_n}{3+u_n}-u_n\times\frac{3+u_n}{3+u_n}=\frac{1+3u_n-3u_n-u_n{}^2}{3+u_n}=\frac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n}$$

b) *Déterminer la monotonie de la suite* (u_n).

Pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, $u_n>1$, donc :

$1-u_n<0$ et $u_{n+1}-u_n<0$.

La suite (u_n) est décroissante.

Exercice 7A.4

On considère la suite (u_n) *définie sur* $\mathbb{N}$ *par* $u_0=2$ *et* $u_{n+1}=2u_n+2n^2-n$.

On pose la suite (v_n) *définie sur* $\mathbb{N}$ *par :* $v_n=u_n+2n^2+3n+5$.

1) *Voici un extrait de tableur :*

	A	B	C
1	*n*	*u*	*v*
2	0	2	7
3	1	4	14
4	2	9	28
5	3	24	56
6	4	63	
7			
8			
9			
10			

Quelles formules a-t-on écrites dans les cellules C2 et B3 et copiées vers le bas pour afficher les termes des suites u et v ?

$v_0=u_0+2\times0^2+3\times0+5$

$v_1=u_1+2\times1^2+3\times1+5$

La formule en C2 est :

$=B2+2\times A2^2+3\times A2+5$

D'autre part :

$u_1=u_{0+1}=2u_0+2\times0^2-0$

$u_2=u_{1+1}=2u_1+2\times1^2-1$

La formule en B3 est :

$=2\times B2+2\times A2^2-A2$

2) *Déterminer une expression de* v_n *et de* u_n *en fonction de n uniquement.*

Il semble que $v_n=7\times2^n$.

Exercice 7A.5

On veut étudier les suites de termes positifs telles que $u_0>1$ *et possédant la propriété suivante :*

pour tout $n>0$, *la somme des n premiers termes est égale au produit de ces termes.*

On admet qu'une telle suite (u_n) *existe. Elle vérifie donc trois propriétés :*

- $u_0 > 1$
- *pour tout* $n \geq 0$, $u_n \geq 0$
- *pour tout* $n > 0$, *et* $u_0 + u_1 + ... + u_{n-1} = u_0 \times u_1 \times ... \times u_{n-1}$.

1) *On choisit* $u_0 = 3$. *Déterminer* u_1 *et* u_2.

$$u_0 + u_1 = u_0 \times u_1 \iff 3 + u_1 = 3 \times u_1 \iff 3 = 3u_1 - u_1 \iff 3 = 2u_1 \iff \frac{3}{2} = u_1$$

$$u_0 + u_1 + u_2 = u_0 \times u_1 \times u_2 \iff 3 + \frac{3}{2} + u_2 = 3 \times \frac{3}{2} \times u_2 \iff \frac{9}{2} + u_2 = \frac{9}{2} \times u_2 \iff 9 + 2u_2 = 9u_2$$

$$\iff 9 = 9u_2 - 2u_2 \iff 9 = 7u_2 \iff \frac{9}{7} = u_2$$

2) *Pour* $n > 0$, *on note* $s_n = u_0 + u_1 + ... + u_{n-1} = u_0 \times u_1 \times ... \times u_{n-1}$.

On a en particulier : $s_1 = u_0$.

a) *Vérifier que pour tout entier* $n > 0$, $s_{n+1} = s_n + u_n$ *et* $s_n > 1$.

Pour tout entier $n > 0$:

$$s_{n+1} = u_0 + u_1 + ... + u_{n-1} + u_n = s_n + u_n.$$

Tous les termes de la suite (u_n) sont positifs et $u_0 > 1$.

Donc la somme de termes positifs dont le premier est supérieur à 1 est supérieure à 1 :

pour tout entier $n > 0$: $s_n > 1$.

b) *En déduire que pour tout entier* $n > 0$, $u_n = \dfrac{s_n}{s_n - 1}$.

D'une part : $s_{n+1} = s_n \times u_n$

Et on vient de montrer que :

$$u_n = s_{n+1} - s_n$$

Ainsi :

$$u_n = s_n \times u_n - s_n$$
$$\iff s_n = s_n \times u_n - u_n$$
$$\iff s_n = (s_n - 1) \times u_n$$

Pour tout entier $n > 0$, $u_n = \dfrac{s_n}{s_n - 1}$.

c) *Montrer que pour tout entier* $n \geq 0$, $u_n > 1$.

$$u_n = \frac{s_n}{s_n - 1} = \frac{s_n - 1 + 1}{s_n - 1} = 1 + \frac{1}{s_n - 1}$$

Or pour tout entier $n > 0$: $s_n > 1$.

$$s_n - 1 > 0 \iff \frac{1}{s_n - 1 > 0} > 0 \iff 1 + \frac{1}{s_n - 1 > 0} > 1 \iff u_n > 1$$

3) *L'algorithme suivant calcule le terme* u_n *pour une valeur de n donnée.*

a) *Compléter le programme python :*

b) *Le tableau ci-dessous donne des valeurs arrondies au millième de* u_n *pour différentes valeurs de l'entier n :*

n	0	5	10	20	30	40
u_n	3	1,140	1,079	1,043	1,030	1,023

```
n = int(input("Rang :"))
u = eval(input("Valeur initiale :"))
s = u
for i in range (n):
   u = s / (s-1)
   s += u
print(n , u)
```

Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite (u_n) ?

La suite (u_n) semble être décroissante et converger vers la valeur 1.

4) a) *Justifier que pour tout entier $n > 0$, $s_n > n$.*

$$s_n = u_0 + u_1 + ... + u_{n-1}$$

et pour tout entier $n \geq 0$, $u_n > 1$.

Ainsi pour tout entier $n > 0$, $s_n > n$.

b) *En déduire la limite de la suite (s_n) puis celle de la suite (u_n).*

$$\lim_{n \to +\infty} n = +\infty$$

Donc par croissances comparées (théorème de l'ascenseur) :

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = +\infty$$

Pour tout entier $n > 0$, $u_n = \dfrac{s_n}{s_n - 1} = \dfrac{s_n}{s_n\left(1 - \dfrac{1}{s_n}\right)} = \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{s_n}}$

Or $\displaystyle \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{s_n} = 0$

Donc par somme et quotient :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$$