Exercice 7B.1 VRAI – FAUX :

Pour chacune des affirmations suivantes, répondre par Vrai ou Faux et justifier votre réponse.

a) Soit une suite (u_n) définie et croissante sur $\mathbb{N}$. Pour tout $n>0$, on a : $u_n<100$.

Affirmation 1 : On ne peut rien en déduire sur la convergence de la suite (u_n).

b) Soit la suite (v_n) définie par $v_0=1024$ et $v_{n+1}=\sqrt{v_n}-1$.

Affirmation 2 : La suite (v_n) n'est pas définie sur $\mathbb{N}$.

c) Si, pour tout entier naturel *n*, on a $u_n\le 0$ alors la suite (u_n) converge.

d) Si, pour tout entier naturel *n*, on a $v_n\ge\dfrac{n}{4}$ alors la suite (v_n) diverge vers $+\infty$.

Exercice 7B.2 Algorithme

Soit la suite (u_n) définie par : $u_0=6$ et $u_{n+1}=1,4u_n-0,05{u_n}^2$.

On admet que cette suite est croissante et converge vers 8.

Écrire un algorithme permettant de donner le plus petit entier *n* tel que : $|u_n-8|\le 10^{-3}$.

Rentrer cet algorithme dans votre calculatrice et donner la réponse.

Exercice 7B.3 Conjecture

Soit la suite (u_n) définie par : $u_0=0$ et $u_{n+1}=u_n+2(n+1)$.

1) a) Déterminer les termes : u_1, u_2, u_3, u_4, u_5.

b) La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?

c) La conjecture $u_n=n(n+1)$ est-elle justifiée ?

2) a) On souhaite écrire un algorithme permettant de calculer u_n, *n* étant donné.

Recopier et compléter les pointillés pour que l'algorithme ci-dessous permette de répondre au problème posé.

Variables : *N*, *I* entiers *U* réels
Entrées et initialisation
    Lire *N*
    · · · → *U*
Traitement
    pour *I* de . . . à . . . **faire**
        . . . . . . → *U*
    fin
Sorties : Afficher *U*

b) Recopier et compléter le tableau suivant :

n	10	20	50	85
u_n				

c) La conjecture est-elle toujours vérifiée ? Pourquoi ?

Exercice 7B.1 VRAI – FAUX :

Pour chacune des affirmations suivantes, répondre par Vrai ou Faux et justifier votre réponse.

a) *Soit une suite (u_n) définie et croissante sur $\mathbb{N}$. Pour tout $n>0$, on a : $u_n<100$.*

***Affirmation 1** : On ne peut rien en déduire sur la convergence de la suite (u_n).*

Toute suite croissante majorée converge : (u_n) est croissante et majorée par 100, elle converge.

b) *Soit la suite (v_n) définie par $v_0=1024$ et $v_{n+1}=\sqrt{v_n}-1$.*

***Affirmation 2** : La suite (v_n) n'est pas définie sur $\mathbb{N}$.*

La racine carrée ne s'applique que pour des nombres positifs.
Le calcul des premiers termes met en évidence une limite :

$$v_1=\sqrt{v_0}-1=\sqrt{1024}-1=32-1=31$$
$$v_2=\sqrt{v_1}-1=\sqrt{31}-1\simeq 5,57-1\simeq 4,57$$
$$v_3=\sqrt{v_2}-1=\sqrt{4,57}-1\simeq 2,14-1\simeq 1,14$$
$$v_4=\sqrt{v_3}-1=\sqrt{1,14}-1\simeq 1,066-1\simeq 0,066$$
$$v_5=\sqrt{v_4}-1=\sqrt{0,066}-1\simeq 0,257-1\simeq -0,743$$

$v_5<0$ donc la suite (v_n) n'est pas définie sur $\mathbb{N}$.

c) *Si, pour tout entier naturel n, on a $u_n\le 0$ alors la suite (u_n) converge.*

Une suite dont tous les termes sont négatif peut diverger vers $-\infty$.

d) *Si, pour tout entier naturel n, on a $v_n\ge \dfrac{n}{4}$ alors la suite (v_n) diverge vers $+\infty$.*

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{4}=+\infty$ donc par croissances comparées (théorème de l'ascenseur) : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$

Exercice 7B.2 Algorithme

Soit la suite (u_n) définie par : $u_0=6$ et $u_{n+1}=1,4u_n-0,05u_n^{\,2}$.
On admet que cette suite est croissante et converge vers 8.
Écrire un algorithme permettant de donner le plus petit entier n tel que : $|u_n-8|\le 10^{-3}$.
Rentrer cet algorithme dans votre calculatrice et donner la réponse.

Algorithme :

```
Initialiser n à 0
Initialiser u à 6
Tant que la valeur absolue de u – 8 est supérieure à 8
    n augmente de 1
    u prend la valeur 1,4 * u – 0,05 * u^2
Afficher n
```

Avec la calculatrice :

```
PROGRAM:SEUIL
:0→N
:6→U
:While abs(U-8)>0.001
:N+1→N
:1.4*U-0.05*U²→U
:End
:Disp "SEUIL:",N
```

→on obtient :

```
prgmSEUIL
SEUIL:
                    16
                  Fait
```

Exercice 7B.3 Conjecture

Soit la suite (u_n) *définie par :* $u_0 = 0$ *et* $u_{n+1} = u_n + 2(n+1)$.

1) a) *Déterminer les termes :* u_1, u_2, u_3, u_4, u_5.

$$u_1 = u_{0+1} = u_0 + 2(0+1) = 2$$
$$u_2 = u_{1+1} = u_1 + 2(1+1) = 2+4 = 6$$
$$u_3 = u_{2+1} = u_2 + 2(2+1) = 6+6 = 12$$
$$u_4 = u_{3+1} = u_3 + 2(3+1) = 12+8 = 20$$
$$u_5 = u_{4+1} = u_4 + 2(4+1) = 20+10 = 30$$

b) *La suite* (u_n) *est-elle arithmétique ? géométrique ?*

$u_2 - u_1 = 6-2 = 4$ et $u_3 - u_2 = 12-6 = 6$ →la suite n'est pas arithmétique

$\frac{u_2}{u_1} = \frac{6}{2} = 3$ et $\frac{u_3}{u_2} = \frac{12}{6} = 2$ →la suite n'est pas géométrique

c) *La conjecture* $u_n = n(n+1)$ *est-elle justifiée ?*

$u_1 = 2 = 1\times 2$, $u_2 = 6 = 2\times 3$, $u_3 = 12 = 3\times 4$, $u_4 = 20 = 4\times 5$, $u_5 = 30 = 5\times 6$

L'hypothèse $u_n = n(n+1)$ est plausible.

2) a) *On souhaite écrire un algorithme permettant de calculer* u_n*, n étant donné.*

Recopier et compléter les pointillés pour que l'algorithme ci-dessous permette de répondre au problème posé.

Variables : *N, I* entiers *U* réels
Entrées et initialisation
Lire *N*
0 → *U*
Traitement
pour *I* de **1** à **N faire**
U + 2*(I + 1) → *U*
fin
Sorties : Afficher *U*

```
n = int(input("Veuillez saisir un rang"))
u = 0
for i in range(0,n):
    u = u + 2*(i+1)
print(u)
```

b) *Recopier et compléter le tableau suivant :*

n	10	20	50	85
u_n	110	420	2550	7310

c) *La conjecture est-elle toujours vérifiée ? Pourquoi ?*

$20\times 21 = 420$, $50\times 51 = 2550$, $85\times 86 = 7310$ →l'hypothèse semble se confirmer.