Exercice sur les Probabilités avec des suites

Exercice 8A.1 :

Alice débute au jeu de fléchettes. Elle effectue des lancers successifs d'une fléchette. Lorsqu'elle atteint la cible à un lancer, la probabilité qu'elle atteigne la cible au lancer suivant est égale à $\frac{1}{3}$. Lorsqu'elle a manqué la cible à un lancer, la probabilité qu'elle manque la cible au lancer suivant est égale à $\frac{4}{5}$.

On suppose qu'au premier lancer elle a autant de chances d'atteindre la cible que de la manquer.
Pour tout entier naturel n strictement positif, on considère les évènements suivants :

A_n : « Alice atteint la cible au n-ième coup »

B_n : « Alice rate la cible au n-ième coup »

On pose $p_n = p(A_n)$.

1- Déterminer p_1 et démontrer que $p_2 = \frac{4}{15}$.

2- Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geq 2$: $p_n = \frac{2}{15} p_{n-1} + \frac{1}{5}$.

3- Pour tout $n \geq 1$, on pose $u_n = p_n - \frac{3}{13}$. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique.

4- Déterminer les variations de la suite (u_n) et celles de la suite (p_n).

5- Donner u_n, puis p_n en fonction de n.

6- Déterminer, et interpréter la limite de la suite (p_n). Combien de lancers faut-il pour que la probabilité de l'atteindre soit égale à cette limite à 10^{-3} près ?

7- Compléter l'algorithme ci-dessous pour retrouver ce nombre de lancers :

Variables :	N est un nombre entier naturel non nul
	P est un nombre réel.
Initialisation :	Affecter à P la valeur ……
	Affecter à N la valeur ……
Traitement :	Tant que ……………………
	Affecter à …………………………..
	Affecter à …………………………..
	Fin de Tant que
Sortie :	Afficher …….

Exercice 8A.2 : Probabilités et suites

Marion débute un jeu dans lequel elle a autant de chances de gagner que de perdre la première partie.
On admet que, lorsqu'elle gagne une partie, la probabilité qu'elle gagne la suivante est de 0,6, alors que, si elle perd une partie, la probabilité qu'elle perde la suivante est de 0,7.
Pour n entier naturel non nul, on note :

- l'événement G_n : "Marion gagne la n-ième partie";
- l'événement P_n : "Marion perd la n-ième partie".

1) Préciser les valeurs des probabilités de G_1 et de P_1.

2) Calculer la probabilité de G_2 et en déduire celle de P_2.

Pour un entier naturel n non nul, on pose :

$x_n = p(\mathrm{G}_n)$ et $y_n = p(\mathrm{P}_n)$.

3) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$x_{n+1} = 0,6x_n + 0,3y_n \quad \text{et} \quad y_{n+1} = 0,4x_n + 0,7y_n$$

4) Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$v_n = x_n + y_n \quad \text{et} \quad w_n = 4x_n - 3y_n$$

   a) Démontrer que la suite (v_n) est constante.

   b) Démontrer que la suite (w_n) est géométrique et exprimer w_n en fonction de n.

   c) Déterminer, pour tout n entier naturel non nul, l'expression de x_n en fonction de n.

   Etudier la convergence de la suite (x_n).

<u>Exercice 8A.3 :</u>

Les questions 1) et 2) sont indépendantes.

1) Soit deux urnes A et B. L'urne A contient 6 boules blanches et 4 boules noires, l'urne B contient 8 boules blanches et 2 boules noires. D'une des deux urnes, choisie au hasard (il y a équiprobabilité pour ce choix), on extrait une boule que l'on remet dans cette même urne : si la boule était blanche on recommence le tirage dans la même urne ; si la boule était noire on recommence le tirage dans l'autre urne. Cette règle est appliquée à chaque tirage et l'on suppose qu'à l'intérieur de chaque urne les tirages sont équiprobables. Soit P_n la probabilité pour que le $n^{\text{ème}}$ tirage se fasse dans l'urne A. $\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$

   a) Déterminer P_1.

   b) Déterminer P_2 : on se rappellera que le second tirage s'est fait dans A soit parce que le premier tirage a été une boule blanche dans A, soit parce que le premier tirage a été d'une boule noire dans B.

   c) Démontrer qu'il existe une relation de récurrence vérifiée par la suite (P_n), de la forme :

   pour tout $n \geq 2$: $P_n = a\,P_{n-1} + b$, où a et b sont des réels que l'on déterminera.

2) Soit la suite réelle (u_n), dont le terme général est défini pour *n* entier strictement positif par :

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} & \\ u_n = \dfrac{2}{5}u_{n-1} + \dfrac{1}{5} & \text{pour tout } n \geq 2 \end{cases}$$

   a) Déterminer un réel α tel que la suite (v_n), dont le terme général est défini pour *n* entier strictement positif par $v_n = u_n - \alpha$, soit une suite géométrique.

   b) Donner l'expression de u_n en fonction de *n*.

   Justifier que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

3)

   a) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $P_n > \dfrac{1}{3}$.

   b) Déterminer tous les entiers *n* pour lesquels on a : $\dfrac{1}{3} < P_n < \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{10\,000}$

Exercice 8A.4 :

1) Soit a un nombre réel. On considère la suite (u_n) de nombres réels définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par la relation de récurrence : $u_{n+1} = \frac{4}{10} - \frac{3}{10}u_n$ et par la condition initiale $u_1 = a$.

   a) Soit (v_n) la suite de nombres réels définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par $\mathrm{v}_n = 13\mathrm{u}_n - 4$.
   Montrer que (v_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison k.
   Exprimer v_n en fonction de *n* et a.

   b) Prouver que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n = \frac{4}{13} + \left(a - \frac{4}{13}\right)\left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1}$.

   c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

2) Un professeur oublie fréquemment les clés de sa salle de classe. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on note E_n l'événement : "le professeur oublie ses clés le jour *n*" et $\overline{\mathrm{E}_n}$ l'événement contraire de E_n.
   Soit p_n la probabilité de E_n et q_n celle de $\overline{\mathrm{E}_n}$.
   On note a la probabilité p_1 qu'il oublie ses clés le premier jour.
   On suppose en outre que les deux conditions suivantes sont réalisées :

   • si le jour n il oublie ses clés, la probabilité qu'il les oublie encore le jour suivant n + 1 est $\frac{1}{10}$.

   • si le jour n il n'oublie pas ses clés, la probabilité qu'il les oublie le jour suivant n + 1 est $\frac{4}{10}$.

   a) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $p_{n+1} = \frac{1}{10}p_n + \frac{4}{10}q_n$.
   Pour cela, on pourra d'abord donner les probabilités conditionnelles $p_{\mathrm{E}_n}\left(\mathrm{E}_{n+1}\right)$ et $p_{\overline{\mathrm{E}_n}}\left(\mathrm{E}_{n+1}\right)$.
   En déduire l'expression de p_{n+1} en fonction de p_n.

   b) A l'aide des résultats de la question 1, donner l'expression de p_n en fonction de a et *n*.
   La limite *p* de p_n dépend-elle de la condition initiale a ?

Exercice 8A.5 :

Avant le début des travaux de construction d'une autoroute, des archéologues procèdent à des sondages successifs en des points régulièrement espacés sur le terrain.
Lorsque le *n*-ième sondage donne lieu à la découverte d'un vestige, il est dit positif.
L'évènement : « le *n*-ième sondage est positif » est noté V_n et on note $p(V_n) = p_n$.
L'expérience acquise au cours de ce type d'investigations permet de prévoir :

- Si un sondage est positif, le suivant à une probabilité égale à 0,6 d'être aussi positif.
- Si un sondage est négatif, le suivant à une probabilité égale à 0,9 d'être aussi négatif.

On suppose que le premier sondage est positif, c'est-à-dire que $p_1 = 1$

1) Calculer la probabilité des évènements suivants :
   A : « les 2ème et 3ème sondages sont positifs ».
   B : « les 2ème et 3ème sondages sont négatifs ».
2) Calculer la probabilité p_3 pour que le 3ème sondage soit positif.
3) Après avoir construit un arbre pondéré au *n*-ième sondage, montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a : $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,1$.
4) On pose, pour tout entier naturel n non nul, $u_n = p_n - 0,2$
   Prouver que *u* est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

5) Exprimer alors u_n puis p_n en fonction de n.

6) En déduire la limite de p_n quand n tend vers $+\infty$

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. Quet

Exercice 8A.1 :

Alice débute au jeu de fléchettes. Elle effectue des lancers successifs d'une fléchette. Lorsqu'elle atteint la cible à un lancer, la probabilité qu'elle atteigne la cible au lancer suivant est égale à $\frac{1}{3}$. Lorsqu'elle a manqué la cible à un lancer, la probabilité qu'elle manque la cible au lancer suivant est égale à $\frac{4}{5}$.

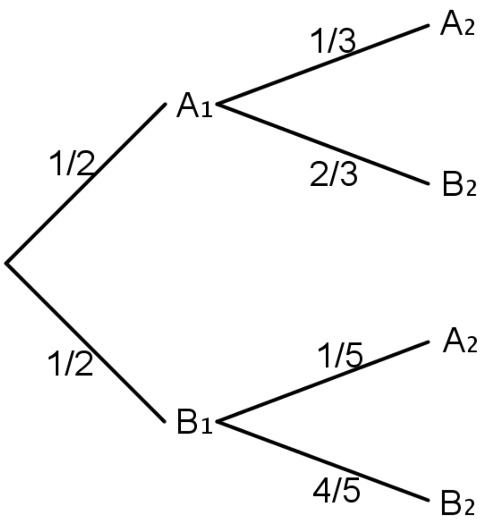
On suppose qu'au premier lancer elle a autant de chances d'atteindre la cible que de la manquer.
Pour tout entier naturel n strictement positif, on considère les évènements suivants :

A_n *: « Alice atteint la cible au n-ième coup »*

B_n *: « Alice rate la cible au n-ième coup »*

On pose $p_n = p(A_n)$.

1- *Déterminer* p_1 *et démontrer que* $p_2 = \frac{4}{15}$.



« au premier lancer elle a autant de chances d'atteindre la cible que de la manquer » : $p_1 = \frac{1}{2}$

A_1 et B_1 sont complémentaires donc :

$$\mathrm{A}_2 = (\mathrm{A}_2 \cap \mathrm{A}_1) \cup (\mathrm{A}_2 \cap \mathrm{B}_1)$$

Donc : $p(\mathrm{A}_2) = p(\mathrm{A}_2 \cap \mathrm{A}_1) + p(\mathrm{A}_2 \cap \mathrm{B}_1)$

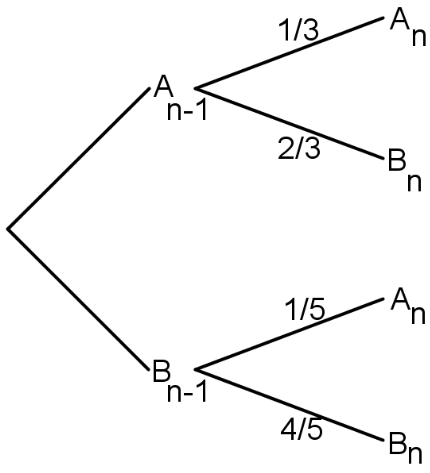
Formule des probabilités conditionnelles :

$$p(\mathrm{A}_2) = p_{\mathrm{A}_1}(\mathrm{A}_2) \times p(\mathrm{A}_1) + p_{\mathrm{B}_1}(\mathrm{A}_2) \times p(\mathrm{B}_1)$$

$$\Leftrightarrow \; p_2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{6} + \frac{1}{10} = \frac{5}{30} + \frac{3}{30} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$$

2 - *Démontrer que, pour tout entier naturel* $n \geq 2$ *:*

$$p_n = \frac{2}{15} p_{n-1} + \frac{1}{5}.$$



A_{n-1} et B_{n-1} sont complémentaires donc :

$$\mathrm{A}_n = (\mathrm{A}_n \cap \mathrm{A}_{n-1}) \cup (\mathrm{A}_n \cap \mathrm{B}_{n-1})$$

Donc : $p(\mathrm{A}_n) = p(\mathrm{A}_n \cap \mathrm{A}_{n-1}) + p(\mathrm{A}_n \cap \mathrm{B}_{n-1})$

Formule des probabilités conditionnelles :

$$p(\mathrm{A}_n) = p_{\mathrm{A}_{n-1}}(\mathrm{A}_n) \times p(\mathrm{A}_{n-1}) + p_{\mathrm{B}_{n-1}}(\mathrm{A}_n) \times p(\mathrm{B}_{n-1})$$

$$\Leftrightarrow \; p_n = \frac{1}{3} \times p_{n-1} + \frac{1}{5} \times (1 - p_{n-1}) = \frac{1}{3} p_{n-1} + \frac{1}{5} - \frac{1}{5} p_{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \; p_n = \frac{5}{15} p_{n-1} + \frac{1}{5} - \frac{3}{15} p_{n-1} = \frac{2}{15} p_{n-1} + \frac{1}{5}$$

3- *Pour tout* $n \geq 1$*, on pose* $u_n = p_n - \frac{3}{13}$*. Démontrer que la suite* (u_n) *est une suite géométrique.*

Pour tout $n \geq 1$, on a : $u_n = p_n - \frac{3}{13} = \frac{2}{15} p_{n-1} + \frac{1}{5} - \frac{3}{13} = \frac{2}{15} p_{n-1} + \frac{13}{65} - \frac{15}{65} = \frac{2}{15} p_{n-1} - \frac{2}{65}$

$$= \frac{2}{15}\left(p_{n-1} - \frac{\boxed{2}}{65} \times \frac{15}{\boxed{2}}\right) = \frac{2}{15}\left(p_{n-1} - \frac{3 \times \boxed{5}}{13 \times \boxed{5}}\right) = \frac{2}{15}\left(p_{n-1} - \frac{3}{13}\right) = \frac{2}{15} u_{n-1}$$

La suite (u_n) est géométrique de 1er terme $u_1 = p_1 - \frac{3}{13} = \frac{1}{2} - \frac{3}{13} = \frac{13}{26} - \frac{6}{26} = \frac{7}{26}$ et de raison $\frac{2}{15}$.

4- *Déterminer les variations de la suite (u_n) et celles de la suite (p_n).*

$0 < \frac{2}{15} < 1$ et le premier terme est positif, donc les termes de la suite (u_n) sont positifs et la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 : elle est convergente.

De l'expression $u_n = p_n - \frac{3}{13}$, on obtient : $p_n = u_n + \frac{3}{13} = \frac{7}{26} \times \left(\frac{2}{15}\right)^{n-1} + \frac{3}{13}$

La suite (p_n) est elle aussi décroissante et minorée par $\frac{3}{13}$: elle est convergente.

5- *Donner u_n, puis p_n en fonction de n.*

$u_n = u_1 \times q^{n-1} = \frac{7}{26} \times \left(\frac{2}{15}\right)^{n-1}$; de l'expression $u_n = p_n - \frac{3}{13}$, on en déduit que :

$$p_n = u_n + \frac{3}{13} = \frac{7}{26} \times \left(\frac{2}{15}\right)^{n-1} + \frac{3}{13}$$

Au premier lancer, Alice a une chance sur deux d'atteindre la cible, plus elle joue, plus cette probabilité baisse jusqu'à se stabiliser à 3 chances sur 13.

6- *Déterminer, et interpréter la limite de la suite (p_n). Combien de lancers faut-il pour que la probabilité de l'atteindre soit égale à cette limite à 10^{-3} près ?*

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{15}\right)^{n-1} = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{7}{26} \times \left(\frac{2}{15}\right)^{n-1} + \frac{3}{13} = \frac{3}{13}$$

A partir du 3ème lancer, la probabilité d'atteindre cette limite est égale à $\frac{3}{13} + 6,4 \times 10^{-4}$.

7- *Compléter l'algorithme ci-dessous pour retrouver ce nombre de lancers :*

Variables : N est un nombre entier naturel non nul

P est un nombre réel.

Initialisation : Affecter à P la valeur **0,5**

Affecter à N la valeur **1**

Traitement : Tant que **P – 3/13 > 0,001**

Affecter à **P = P * (2/15) + 1/5**

ou Affecter à **P = (7/26) * (2/15)^(N–1) + 3/13**

Affecter à **N = N + 1**

Fin de Tant que

Sortie : Afficher **N**

<u>Exercice 8A.2 :</u> Probabilités et suites

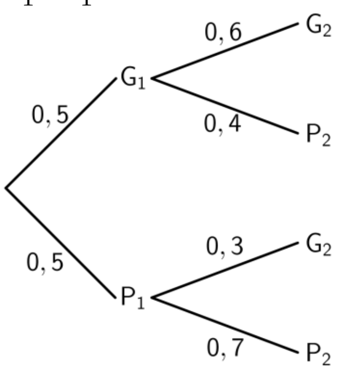
Marion débute un jeu dans lequel elle a autant de chances de gagner que de perdre la première partie.
On admet que, lorsqu'elle gagne une partie, la probabilité qu'elle gagne la suivante est de 0,6, alors que, si elle perd une partie, la probabilité qu'elle perde la suivante est de 0,7.
Pour n entier naturel non nul, on note :

- *l'événement* G_n *: "Marion gagne la n-ième partie";*
- *l'événement* P_n *: "Marion perd la n-ième partie".*

1) *Préciser les valeurs des probabilités de G_1 et de P_1.*

Marion a autant de chances de gagner que de perdre la première partie : $G_1 = P_1 = 0,5$.

2) *Calculer la probabilité de G_2 et en déduire celle de P_2.*



G_1 et P_1 forment une partition de l'univers.

D'après la loi des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p(G_2) &= p(G_1 \cap G_2) + p(P_1 \cap G_2) \\ &= p(G_1) \times p_{G_1}(G_2) + p(P_1) \times p_{P_1}(G_2) \\ &= 0,5 \times 0,6 + 0,5 \times 0,3 \\ &= 0,45 \end{aligned}$$

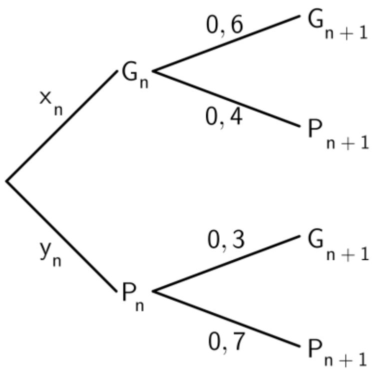
$$p(P_2) = 1 - p(G_2) = 1 - 0,45 = 0,55$$

Pour un entier naturel n non nul, on pose :

$$x_n = p(G_n) \text{ et } y_n = p(P_n).$$

3) *Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a :*

$$x_{n+1} = 0,6x_n + 0,3y_n \quad \text{et} \quad y_{n+1} = 0,4x_n + 0,7y_n$$



G_n et P_n forment une partition de l'univers.

D'après la loi des probabilités totales :

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= p(G_{n+1}) \\ &= p(G_n \cap G_{n+1}) + p(P_n \cap G_{n+1}) \\ &= p(G_n) \times p_{G_n}(G_{n+1}) + p(P_n) \times p_{P_n}(G_{n+1}) \\ &= 0,6x_n + 0,3y_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= p(P_{n+1}) = p(G_n \cap P_{n+1}) + p(P_n \cap P_{n+1}) = p(G_n) \times p_{G_n}(P_{n+1}) + p(P_n) \times p_{P_n}(P_{n+1}) \\ &= 0,4x_n + 0,7y_n \end{aligned}$$

4) *Pour tout entier naturel n non nul, on pose :*

$$v_n = x_n + y_n \quad \text{et} \quad w_n = 4x_n - 3y_n$$

a) *Démontrer que la suite (v_n) est constante.*

Pour tout entier naturel n non nul :

$$v_{n+1} = x_{n+1} + y_{n+1} = 0,6x_n + 0,3y_n + 0,4x_n + 0,7y_n = x_n + y_n = v_n$$

La suite (v_n) est constante : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$v_n = v_1 = x_1 + y_1 = 0,5 + 0,5 = 1$$

b) *Démontrer que la suite (w_n) est géométrique et exprimer w_n en fonction de n.*

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= 4x_{n+1} - 3y_{n+1} = 4(0,6x_n + 0,3y_n) - 3(0,4x_n + 0,7y_n) \\ &= 2,4x_n + 1,2y_n - 1,2x_n - 2,1y_n \\ &= 1,2x_n - 0,9y_n \\ &= 0,3(4x_n - 3y_n) \\ &= 0,3w_n \end{aligned}$$

La suite (w_n) est géométrique de premier terme $w_1 = 4x_1 - 3y_1 = 4 \times 0,5 - 3 \times 0,5 = 0,5$ et de raison $q = 0,3$. Pour tout pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$w_n = w_1 \times q^{n-1} = 0,5 \times 0,3^{n-1}$$

c) *Déterminer, pour tout n entier naturel non nul, l'expression de x_n en fonction de n.*

Etudier la convergence de la suite (x_n).

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $p(\mathrm{G}_n)+p(\mathrm{P}_n)=1$ donc $x_n+y_n=1$ ainsi : $y_n=1-x_n$

$$w_n=4x_n-3y_n=4x_n-3(1-x_n)=4x_n-3+3x_n=7x_n-3$$

Par équivalences successives :

$$w_n=7x_n-3 \iff w_n+3=7x_n \iff \frac{w_n+3}{7}=x_n$$

Ainsi :

$$x_n=\frac{0,5\times 0,3^{n-1}+3}{7}=\frac{1}{14}\times 0,3^{n-1}+\frac{3}{7}$$

$0<0,3<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,3^{n-1}=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=\frac{3}{7}$

Exercice 8A.3 :

1) a) P_1 est la probabilité pour que le premier tirage se fasse dans l'urne A.

Puisqu'au départ l'urne est choisie au hasard et qu'on suppose qu'il y a équiprobabilité pour ce choix, on a $P_1=\frac{1}{2}$.

b) Notons A_2 l'événement : «le $2^{\text{ème}}$ tirage s'est fait dans A».

Le 1^{er} tirage s'étant fait soit dans A, soit dans B, on peut écrire :

$$\mathrm{A}_2=(\mathrm{A}_2\cap\mathrm{A}_1)\cup(\mathrm{A}_2\cap\mathrm{B}_1)$$

Or les évènements $(\mathrm{A}_2\cap\mathrm{A}_1)$ et $(\mathrm{A}_2\cap\mathrm{B}_1)$ sont incompatibles, donc :

$$p(\mathrm{A}_2)=p(\mathrm{A}_2\cap\mathrm{A}_1)+p(\mathrm{A}_2\cap\mathrm{B}_1)$$

D'après la formule des probabilités totales, on peut écrire :

$$p(\mathrm{A}_2)=p_{\mathrm{A}_1}(\mathrm{A}_2)\times p(\mathrm{A}_1)+p_{\mathrm{B}_1}(\mathrm{A}_2)\times p(\mathrm{B}_1)$$

$$\mathrm{P}_2=p_{\mathrm{A}_1}(\mathrm{A}_2)\times\mathrm{P}_1+p_{\mathrm{B}_1}(\mathrm{A}_2)\times(1-\mathrm{P}_1)$$ puisque B_1 est l'événement contraire de A_1

Sachant que la première boule a été tirée dans l'urne A, la deuxième boule est tirée dans A si la première boule tirée était blanche. On sait que dans l'urne A il y a 6 boules blanches sur un total de 10 boules, de plus on sait que les tirages dans cette urne sont supposés équiprobables.
On a donc :

$$p_{\mathrm{A}_1}(\mathrm{A}_2)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

Sachant que la première boule a été tirée dans l'urne B, la deuxième boule est tirée dans A si la première boule tirée était noire. On sait que dans l'urne B il y a 2 boules noires sur un total de 10boules, de plus on sait que les tirages dans cette urne sont supposés équiprobables.
On a donc :

$$p_{\mathrm{B}_1}(\mathrm{A}_2)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$

On obtient :

$$\mathrm{P}_2=\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{10}+\frac{1}{10}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$

c) On conserve les mêmes notations que précédemment.

Le $(n-1)^{\text{ème}}$ tirage s'étant fait soit dans A, soit dans B, on peut écrire :

$$\mathrm{A}_n=(\mathrm{A}_n\cap\mathrm{A}_{n-1})\cup(\mathrm{A}_n\cap\mathrm{B}_{n-1})$$

Or les évènements $(\mathrm{A}_2\cap\mathrm{A}_1)$ et $(\mathrm{A}_2\cap\mathrm{B}_1)$ sont incompatibles, donc :

$$p(A_n) = p(A_n \cap A_{n-1}) + p(A_n \cap B_{n-1})$$

D'après la formule des probabilités totales, on peut écrire :

$$p(A_n) = p_{A_{n-1}}(A_n) \times p(A_{n-1}) + p_{B_{n-1}}(A_n) \times p(B_{n-1})$$

or B_{n-1} est l'événement contraire de A_{n-1}, donc :

$$P_n = p_{A_{n-1}}(A_n) \times P_{n-1} + p_{B_{n-1}}(A_n) \times (1 - P_{n-1})$$

Sachant que la $(n-1)^{\text{ème}}$ boule a été tirée dans l'urne A, la $n^{\text{ème}}$ boule est tirée dans A si la $(n-1)^{\text{ème}}$ boule tirée était blanche. On sait que dans l'urne A il y a 6 boules blanches sur un total de 10 boules, de plus on sait que les tirages dans cette urne sont supposés équiprobables.
On a donc :

$$p_{A_{n-1}}(A_n) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

Sachant que la $(n-1)^{\text{ème}}$ boule a été tirée dans l'urne B, la $n^{\text{ème}}$ deuxième boule est tirée dans A si la $(n-1)^{\text{ème}}$ boule tirée était noire. On sait que dans l'urne B il y a 2 boules noires sur un total de 10boules, de plus on sait que les tirages dans cette urne sont supposés équiprobables.
On a donc :

$$p_{B_{n-1}}(A_n) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

On obtient :

$$P_n = \frac{3}{5} \times P_{n-1} + \frac{1}{5} \times (1 - P_{n-1}) = \frac{3}{5} \times P_{n-1} + \frac{1}{5} - \frac{1}{5} P_{n-1}$$

Soit : $\quad P_n = \frac{2}{5} \times P_{n-1} + \frac{1}{5}$ pour tout $n \geq 2$.

2) La suite réelle (u_n), est définie par : $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_n = \frac{2}{5} u_{n-1} + \frac{1}{5} \end{cases}$ pour tout $n \geq 2$.

a) Considérons (v_n) définie par $v_n = u_n - \alpha$; on a donc aussi : $u_n = v_n + \alpha$ pour tout $n \geq 1$.
On a, pour $n \geq 2$:

$$v_n = u_n - \alpha = \frac{2}{5} u_{n-1} + \frac{1}{5} - \alpha = \frac{2}{5}(v_{n-1} + \alpha) + \frac{1}{5} - \alpha = \frac{2}{5} v_{n-1} + \frac{2}{5}\alpha + \frac{1}{5} - \alpha$$

Soit : $\quad v_n = \frac{2}{5} v_{n-1} + \frac{1}{5} - \frac{3}{5}\alpha$

(v_n) est géométrique si $v_n = \frac{2}{5} v_{n-1}$ en prenant α tel que : $\frac{1}{5} - \frac{3}{5}\alpha = 0 \iff \frac{3}{5}\alpha = \frac{1}{5} \iff \alpha = \frac{1}{3}$

Lorsque $\alpha = \frac{1}{3}$, la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{2}{5}$.

b) Lorsque $\alpha = \frac{1}{3}$, la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{2}{5}$, alors on a :

$$v_n = v_1 \times \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} \text{ pour tout } n \geq 1 \text{ avec } v_1 = u_1 - \alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Ainsi $\quad v_n = \frac{1}{6} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$

Or $u_n = v_n + \alpha$ donc $u_n = \frac{1}{6} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{3}$ pour tout $n \geq 1$

On a : $-1 < \frac{2}{5} < 1$ donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} = 0$ et on en déduit : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{3}$

Cette limite étant finie, on peut dire que la suite (u_n) converge vers $\frac{1}{3}$.

3) a) On peut remarquer que la suite (P_n) de la 1ère question est identique à la suite (u_n) de la 2ème.

On a donc :

$$\mathrm{P}_n = \frac{1}{6} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{3}$$

Or $\frac{1}{6} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} > 0$ donc : $\mathrm{P}_n > \frac{1}{3}$

b) On a vu que pour tous les entiers $n \geq 1$, on a : $\mathrm{P}_n > \frac{1}{3}$

On cherche donc les entiers *n* tels que : $P_n < \frac{1}{3} + \frac{1}{10\,000}$:

$$P_n < \frac{1}{3} + \frac{1}{10\,000} \Leftrightarrow \frac{1}{6} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{3} < \frac{1}{3} + \frac{1}{10\,000} \Leftrightarrow \frac{1}{6} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} < \frac{1}{10\,000}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} < \frac{6}{10\,000} \Leftrightarrow \ln\left[\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}\right] < \ln \frac{6}{10\,000}$$

(car la fonction ln est croissante sur $]0;+\infty[$)

$$\Leftrightarrow (n-1)\ln\left(\frac{2}{5}\right) < \ln \frac{6}{10\,000} \Leftrightarrow (n-1) > \frac{\ln \frac{6}{10\,000}}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)}$$

$$\Leftrightarrow n > 1 + \frac{\ln 6 - \ln 10\,000}{\ln 2 - \ln 5}$$

D'après la calculatrice : $1 + \frac{\ln 6 - \ln 10\,000}{\ln 2 - \ln 5} \simeq 9{,}09$

On a donc :

$$\frac{1}{3} < P_n < \frac{1}{3} + \frac{1}{10\,000} \text{ pour tout } n \geq 10.$$

Exercice 8A.4 :

1) a) La suite (u_n) est définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $u_{n+1} = \frac{4}{10} - \frac{3}{10}u_n$ et par la condition initiale $u_1 = a$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $v_n = 13u_n - 4$ et par conséquent $u_n = \frac{1}{13}v_n + \frac{4}{13}$.

On peut donc écrire :

$$v_{n+1} = 13u_{n+1} - 4 = 13\left(\frac{4}{10} - \frac{3}{10}u_n\right) - 4 = \frac{52}{10} - \frac{39}{10}u_n - \frac{40}{10} = \frac{12}{10} - \frac{39}{10}u_n$$

$$=\frac{12}{10}-\frac{39}{10}\times\left(\frac{1}{13}v_n+\frac{4}{13}\right)=\frac{12}{10}-\frac{3}{10}v_n-\frac{12}{10}=-\frac{3}{10}v_n$$

ou $$=\frac{1}{10}(12-39u_n)=\frac{1}{10}\times(-3)(13u_n-4)=-\frac{3}{10}\times v_n$$

Ainsi (v_n) est donc une suite géométrique de raison k = $-\frac{3}{10}$.

Le premier terme de la suite (v_n) est : $v_1=13u_1-4=13a-4$.

La suite (v_n) étant géométrique de premier terme v_1 et de raison k, on peut écrire :

$$\text{pour tout } n\in\mathbb{N}^* :\ v_n=v_1\times\left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1}=(13a-4)\times\left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1}$$

b) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $u_n=\frac{1}{13}v_n+\frac{4}{13}=\frac{1}{13}\left[(13a-4)\times\left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1}\right]+\frac{4}{13}=\left(a-\frac{4}{13}\right)\times\left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1}+\frac{4}{13}$

c) On a : $-1<-\frac{3}{10}<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1}=0$, on en déduit donc que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\frac{4}{13}$

2) a) D'après les hypothèses de l'énoncé, on a, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $p_{E_n}(E_{n+1})=\frac{1}{10}$ et $p_{\overline{E_n}}(E_{n+1})=\frac{4}{10}$.

On peut alors écrire : $E_{n+1}=(E_{n+1}\cap E_n)\cup(E_{n+1}\cap\overline{E_n})$

Les événements $(E_{n+1}\cap E_n)$ et $(E_{n+1}\cap\overline{E_n})$ étant disjoints, on en déduit donc :

$$p(E_{n+1})=p(E_{n+1}\cap E_n)+p(E_{n+1}\cap\overline{E_n})$$

En utilisant la formule des probabilités conditionnelles on obtient alors :

$$p(E_{n+1})=p_{E_n}(E_{n+1})\times p(E_n)+p_{\overline{E_n}}(E_{n+1})\times p(\overline{E_n})$$

donc : $p_{n+1}=\frac{1}{10}p_n+\frac{4}{10}q_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Or pour tout événement E_n, on a : $p(\overline{E_n})=1-p(E_n)$, ainsi : $q_n=1-p_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Donc $$p_{n+1}=\frac{1}{10}p_n+\frac{4}{10}(1-p_n)=\frac{1}{10}p_n-\frac{4}{10}p_n+\frac{4}{10}=-\frac{3}{10}p_n+\frac{4}{10}.$$

b) La probabilité p_1 étant notée a, la suite (p_n) n'est autre que la suite (u_n) de la question 1.

On a donc : pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $p_n=\left(a-\frac{4}{13}\right)\times\left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1}+\frac{4}{13}$.

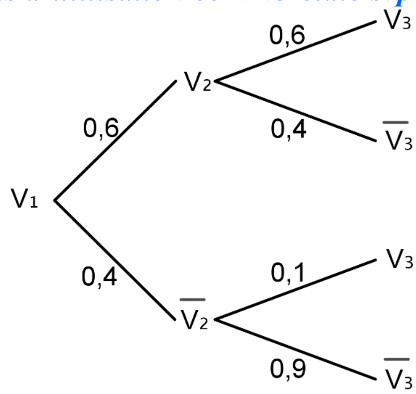
On a vu que $\lim\limits_{n\to+\infty}p_n=\frac{4}{13}$ donc la limite de (p_n) ne dépend donc pas de la condition initiale a.

Exercice 8A.5 : Suites et probabilités

Avant le début des travaux de construction d'une autoroute, des archéologues procèdent à des sondages successifs en des points régulièrement espacés sur le terrain.
Lorsque le n-ième sondage donne lieu à la découverte d'un vestige, il est dit positif.
L'évènement : « le n-ième sondage est positif » est noté V_n *et on note* $P(V_n)=p_n$.
L'expérience acquise au cours de ce type d'investigations permet de prévoir :

- *Si un sondage est positif, le suivant à une probabilité égale à 0,6 d'être aussi positif.*
- *Si un sondage est négatif, le suivant à une probabilité égale à 0,9 d'être aussi négatif.*

On suppose que le premier sondage est positif, c'est-à-dire que $p_1=1$.



1) *Calculer la probabilité des évènements suivants :*

A : « les 2ème et 3ème sondages sont positifs ».

B : « les 2ème et 3ème sondages sont négatifs ».

Formule des probabilités conditionnelles :

$$p(A)=p(V_2\cap V_3)=p(V_2)\times p_{V_2}(V_3)=0,6\times 0,6=0,36$$

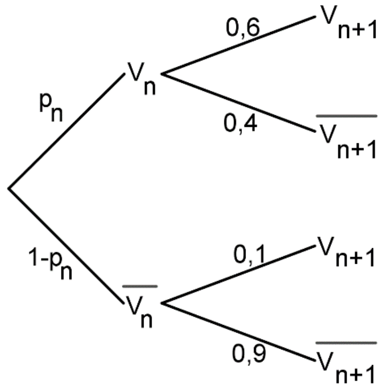
$$p(B)=p(\overline{V_2}\cap\overline{V_3})=p(\overline{V_2})\times p_{\overline{V_2}}(\overline{V_3})=0,4\times 0,9=0,36$$

2) *Calculer la probabilité p_3 pour que le 3ème sondage soit positif.*

V_2 et $\overline{V_2}$ forment une partition de l'univers.

Loi des probabilités totales :

$$p_3=p(V_2\cap V_3)+p(\overline{V_2}\cap V_3)=0,36+p(\overline{V_2})\times p_{\overline{V_2}}(V_3)=0,36+0,4\times 0,1=0,4$$



3) *Après avoir construit un arbre pondéré au n-ième sondage, montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a :*

$p_{n+1}=0,5p_n+0,1$.

V_n et $\overline{V_n}$ forment une partition.

Loi des probabilités totales :

$$\begin{aligned}p_{n+1}&=p(V_n\cap V_{n+1})+p(\overline{V_n}\cap V_{n+1})\\&=p(V_n)\times p_{V_n}(V_{n+1})+p(\overline{V_n})\times p_{\overline{V_n}}(V_{n+1})\\&=p_n\times 0,6+(1-p_n)\times 0,1\\&=p_n\times 0,6+0,1-0,1p_n\\&=0,5p_n+0,1\end{aligned}$$

4) *On pose, pour tout entier naturel n non nul,* $u_n=p_n-0,2$

Prouver que u est une suite géométrique dont on précisera premier terme et raison.

$$u_{n+1}=p_{n+1}-0,2=0,5p_n+0,1-0,2=0,5p_n-0,1=0,5\left(p_n-\frac{0,1}{0,5}\right)=0,5(p_n-0,2)=0,5u_n$$

La suite u est géométrique de raison $q=0,5$ et de premier terme $u_1=p_1-0,2=1-0,2=0,8$.

5) *Exprimer alors u_n puis p_n en fonction de n.*

$$u_n=u_1\times q^{n-1}=0,8\times 0,5^{n-1}\quad\text{donc}\quad p_n=u_n+0,2=0,8\times 0,5^{n-1}+0,2.$$

6) *En déduire la limite de p_n quand n tend vers $+\infty$*

$$0<0,5<1\ \text{ donc }\ \lim_{n\to+\infty}0,5^{n-1}=0\quad\text{et}\quad\lim_{n\to+\infty}p_n=0,2.$$