Exercices à prise d'initiative sur les Suites

Exercice 1 :

Pour tout entier $n \geq 2$, on pose :

$$u_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \times \ldots \times \left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

La suite (u_n) a-t-elle une limite ? Si oui, laquelle ? Si non, justifier.

Exercice 2 :

La courbe *C* représente, dans un repère du plan, la fonction exponentielle.

On considère les points $\mathrm{A}_0(0;0)$ et $\mathrm{B}_0(0;1)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- B_n est le point de *C* ayant la même abscisse x_n que A_n.
- A_{n+1} est le point d'intersection de la tangente à la courbe *C* au point B_n et l'axe des abscisses.
- T_n est le triangle $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{A}_{n+1}$.

La somme des aires des triangles T_0, T_1, …, T_n admet-elle une limite quand *n* tend vers $+\infty$?

Exercice 3 :

Soit la somme définie pour tout entier $n \geq 1$ par :

$$\mathrm{S}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k \times (n-k).$$

Déterminer une forme explicite de S_n.

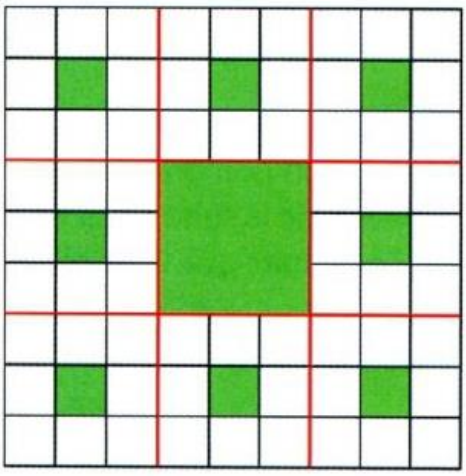
La suite converge-t-elle ? Justifier.

Exercice 4 :

On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et pour tout entier $n \geq 1$: $u_{n+1} = \dfrac{n \times u_n + 4}{n+1}$.

Démontrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 5 : **Tapis de Sierpinsky**



Un carré d'aire $1\ \mathrm{m}^2$ est divisé en neuf carrés identiques comme indiqué sur la figure ci-contre. On colorie le carré central. Les huit carrés restant sont à leur tour divisés en neuf carrés. On poursuit avec la même méthode la division et le coloriage du carré.

Pour tout nombre entier naturel $n \geq 1$, on note A_n l'aire, en m^2, de la surface totale colorée après *n* coloriages. On a ainsi $A_1 = \frac{1}{9}$.

1) Expliquer pourquoi pour tout entier naturel, $A_{n+1} = \frac{8}{9} A_n + \frac{1}{9}$.
2) Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on pose $B_n = A_n - 1$. Quelle est la nature de la suite (B_n) ? Exprimer A_n en fonction de *n*.
3) Déterminer à partir de combien d'étapes on aura colorié 85% du carré.
4) Supposons maintenant qu'au lieu de colorier les parties du carré, on les évide. Cet objet est fractal et appelé le **tapis de Sierpinsky**. Déterminer à partir de combien d'étapes on aura évidé 99% du carré initial.

Exercice 6 : **Suite et fonction exponentielle**

La courbe C représente, dans un repère du plan, la fonction exponentielle. On considère les points $\mathrm{A}_0(0;0)$ et $\mathrm{B}_0(0;1)$.

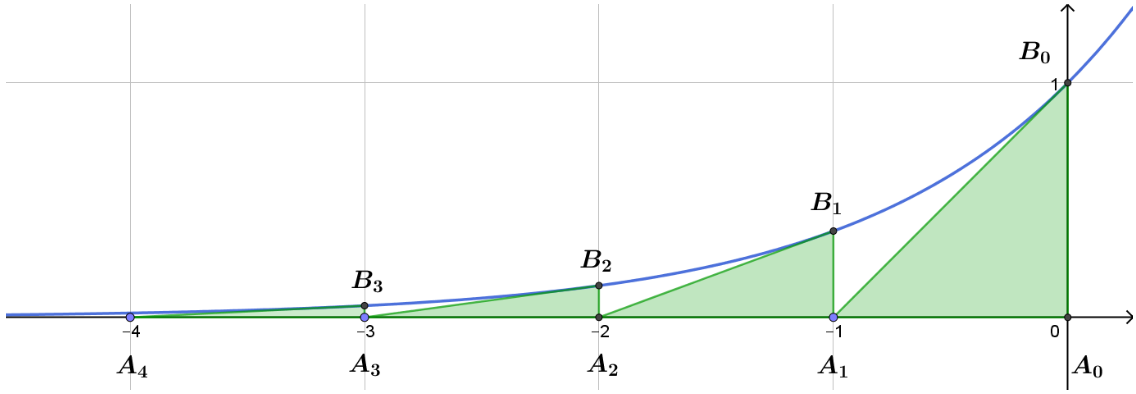
Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

B_n est le point de C de même abscisse x_n que A_n.

A_{n+1} est le point d'intersection de la tangente à la courbe C au point B_n et l'axe des abscisses.

T_n est le triangle $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{A}_{n+1}$.

La somme des aires des triangles $\mathrm{T}_0, \mathrm{T}_1, \cdots, \mathrm{T}_n$ admet-elle une limite quand *n* tend vers $+\infty$?



Exercice 7 :

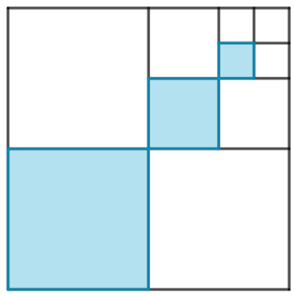
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier $n \geq 1$:

$$u_n = u_{n-1} + 4n + 1.$$

Exprimer u_n en fonction de n.

Exercice 8 :

On partage un carré de côté 1 en quatre carrés de même aire et on colorie le carré inférieur gauche.
On applique ce même procédé au carré supérieur droit et ainsi de suite, comme sur la figure ci-contre.
Vers quelle valeur semble se rapprocher l'aire coloriée lorsque l'on répète indéfiniment ce procédé ? Pourquoi ?



Exercice 9

Soit la suite (w_n) dont les termes vérifient, pour tout entier $n > 1$: $\begin{cases} w_0 = 1 \\ nw_n = (n+1)w_{n-1} + 1 \end{cases}$.

On obtient les premiers termes suivants :

w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

1) Détailler le calcul permettant d'obtenir w_{10}.
2) Quelle conjecture peut-on faire sur la nature de la suite (w_n) ?
   Démontrer cette conjecture puis calculer w_{2021}.

<u>Exercice 10</u>

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{u_n + 4}$.

1) On pose $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}$. Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
2) Exprimer v_n puis u_n en fonction de *n*.
3) Déterminer la limite de (v_n) puis celle de (u_n).

<u>Exercice 11 :</u>

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 0$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} + u_n = n$.

Exprimer u_n en fonction de n.

<u>Exercice 12 :</u>

Sur une île chaque jour et dans cet ordre, chaque loup tue un mouton, chaque mouton tue un serpent et chaque serpent tue un loup. Après 10 jours il ne reste plus sur l'île qu'un mouton et aucun autre animal.
Combien y avait-il d'animaux de chaque espèce au départ ?

<u>Exercice 13 :</u>

On note M_0 le mot *ab* et pour tout entier naturel *n*, le mot M_{n+1} se construit à partir du mot M_n en remplaçant tous les *a* par *ab* et tous les *b* par *bab*.
Ainsi, $M_0 = ab$, $M_1 = abbab$ et $M_2 = abbabbababbab$.

1. Quelle est la longueur du mot M_{10} ?
2. Combien de b contient le mot M_{10} ?

<u>Exercice 14</u>

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{4}u_n + n \end{cases}$ (R).

1) Déterminer une suite arithmétique (w_n) satisfaisant la relation (*R*).
2) On pose $v_n = u_n - w_n$.
   Montrer que la suite (v_n) est géométrique et préciser sa raison et v_0.
3) Exprimer v_n, puis u_n en fonction de *n*.
4) a) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$, puis $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{n}$.
   b) Programmer la suite (u_n) et vérifier les limites trouvées.

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. Quet

Exercice 1 :

Pour tout entier $n \geq 2$*, on pose :* $u_n = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\times\ldots\times\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

La suite (u_n) *a-t-elle une limite ? Si oui, laquelle ? Si non, justifier.*

Il faut « faire parler » la suite (u_n) :

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{2^2-1}{2^2}\times\frac{3^2-1}{3^2}\times\ldots\times\frac{n^2-1}{n^2} \\
&= \frac{2^2-1^2}{2^2}\times\frac{3^2-1^2}{3^2}\times\ldots\times\frac{n^2-1^2}{n^2} \\
&= \frac{(2-1)(2+1)}{2^2}\times\frac{(3-1)(3+1)}{3^2}\times\ldots\times\frac{(n-1)(n+1)}{n^2} \\
&= \frac{1\times3\times2\times4\times3\times5\times\ldots\times(n-2)\times n\times(n-1)\times(n+1)}{2^2\times3^2\times4^2\times\ldots\times n^2} \\
&= \frac{1\times2\times3^2\times4^2\times\ldots\times(n-2)^2\times(n-1)^2\times n\times(n+1)}{2^2\times3^2\times4^2\times\ldots\times n^2} \\
&= \frac{n+1}{2n}
\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{2n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2}$$

Exercice 2 :

La courbe C représente, dans un repère du plan, la fonction exponentielle.

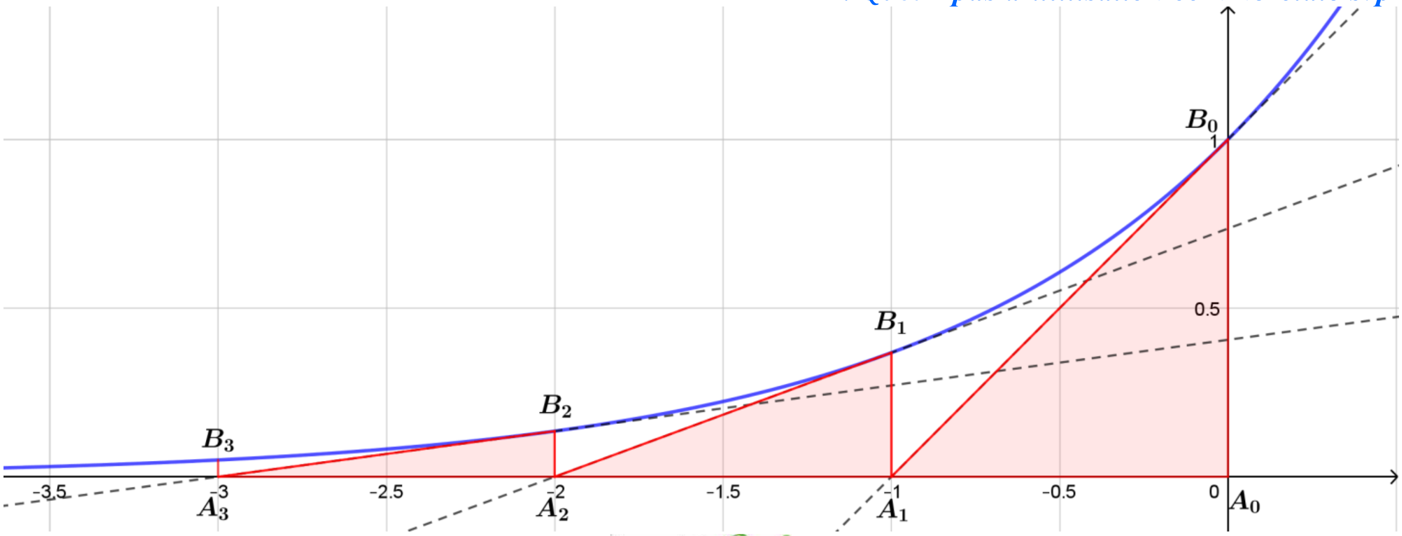
On considère les points $\mathrm{A}_0(0;0)$ *et* $\mathrm{B}_0(0;1)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ *:*

- B_n *est le point de C ayant la même abscisse* x_n *que* A_n.
- A_{n+1} *est le point d'intersection de la tangente à la courbe C au point* B_n *et l'axe des abscisses.*
- T_n *est le triangle* $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{A}_{n+1}$.

La somme des aires des triangles T_0, T_1, …, T_n *admet-elle une limite quand n tend vers* $+\infty$ *?*

Soit $f(x) = e^x$ pour tout réel *x*. Le schéma suivant illustre la situation :



Il semblerait que pour tout entier naturel *i*, l'abscisse de A_i soit égale à $-i$.

On définit les points $\mathrm{A}_n\left(x_n\,;0\right)$ et $\mathrm{B}_n\left(x_n\,;e^{x_n}\right)$.

L'équation de la tangente à la courbe au point B_n est donnée par la formule :

$$y=f\,'(x_n)\times(x-x_n)+f\,(x_n),$$

Soit : $$y=e^{x_n}\times(x-x_n)+e^{x_n}.$$

Le point d'intersection de chaque tangente avec l'axe des abscisses vérifie :

$$y=0$$

Ce point d'intersection donne l'abscisse du point $\mathrm{A}_{n+1}\left(x_{n+1};0\right)$, donc :

$$\Leftrightarrow\ e^{x_n}\times\left(x_{n+1}-x_n\right)+e^{x_n}=0$$

$$\Leftrightarrow\ e^{x_n}\times\left(x_{n+1}-x_n\right)=-e^{x_n}$$

$$\Leftrightarrow\ x_{n+1}-x_n=-1$$

$$\Leftrightarrow\ x_{n+1}=x_n-1.$$

La suite $\left(x_n\right)$ est arithmétique de raison $r=-1$ et de premier terme $x_0=0$. Son expression générale est :

$$x_n=x_0+nr=-n.$$

Les coordonnées des points A_n sont : $(-n;0)$.

L'aire de chaque triangle T_n est :

$$\frac{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\times\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}}{2}=\frac{e^{x_n}\times 1}{2}=\frac{e^{-n}}{2}.$$

La somme cherchée est :

$$\begin{aligned}\frac{e^{-0}}{2}+\frac{e^{-1}}{2}+\frac{e^{-2}}{2}+\ldots+\frac{e^{-n}}{2}&=\frac{1}{2}\left(e^0+e^{-1}+e^{-2}+\ldots+e^{-n}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\left(e^{-1}\right)^0+\left(e^{-1}\right)^1+\left(e^{-1}\right)^2+\ldots+\left(e^{-1}\right)^n\right)\\&=\frac{1}{2}\times\frac{1-\left(e^{-1}\right)^{n+1}}{1-e^{-1}}\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1-\left(e^{-1}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{e}}$$

$$=\frac{e}{2}\times\frac{1-\left(e^{-1}\right)^{n+1}}{e-1}$$

$$=\frac{e}{2(e-1)}\times\left[1-\left(e^{-1}\right)^{n+1}\right]$$

Or $0<e^{-1}<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(e^{-1}\right)^{n+1}=0$.

Ainsi la somme cherchée a pour limite :

$$\frac{e}{2(e-1)}.$$

Exercice 3 :

Soit la somme définie pour tout entier $n\geq 1$ *par :* $\quad \mathrm{S}_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k\times(n-k)$.

Déterminer une forme explicite de S_n. *La suite converge-t-elle ? Justifier.*

Calculons les premiers termes :

$$\mathrm{S}_1=\frac{1}{1}\sum_{k=1}^{1}k\times(1-k)=1\times 0=0$$

$$\mathrm{S}_2=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}k\times(2-k)=\frac{1}{2}\left[1\times(2-1)+2\times(2-2)\right]=\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$$

$$\mathrm{S}_3=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{3}k\times(3-k)=\frac{1}{3}\left[1\times(3-1)+2\times(3-2)+3\times(3-3)\right]=\frac{1}{3}(2+2)=\frac{4}{3}=\frac{8}{6}$$

$$\mathrm{S}_4=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4}k\times(4-k)=\frac{1}{4}\left[1\times(4-1)+2\times(4-2)+3\times(4-3)\right]=\frac{1}{4}(3+4+3)=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}=\frac{15}{6}$$

$$\mathrm{S}_5=\frac{1}{5}\sum_{k=1}^{5}k\times(5-k)=\frac{1}{5}\left[1\times(5-1)+2\times(5-2)+3\times(5-3)+4\times(5-4)\right]=\frac{1}{5}(4+6+6+4)=\frac{20}{5}=4=\frac{24}{6}$$

Il semblerait que pour tout entier $n\geq 1$:

$$\mathrm{S}_n=\frac{1}{6}\left(n^2-1\right).$$

Initialisation :

Pour $n=1$: $\mathrm{S}_1=0$ et $\frac{1}{6}\left(1^2-1\right)=0$ donc $\mathrm{S}_1=\frac{1}{6}\left(1^2-1\right)$

Hérédité :

Supposons qu'il existe un rang n tel que $\mathrm{S}_n=\frac{1}{6}\left(n^2-1\right)$

→est-ce que $\mathrm{S}_{n+1}=\frac{1}{6}\left((n+1)^2-1\right)=\frac{1}{6}\left(n^2+2n\right)$?

Par définition :

$$S_{n+1}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}k\times\left((n+1)-k\right)$$

$$=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}k\times(n+1-k)$$

$$=\frac{1}{n+1}\left[\sum_{k=1}^{n}k\times(n+1-k)+(n+1)\times(n+1-(n+1))\right]$$ → avec $(n+1)\times(n+1-(n+1))=0$

$$=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}k\times(n+1-k)$$ →il faut faire apparaitre $S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k\times(n-k)$

$$=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\left[k\times(n-k)+k\times 1\right]$$

$$=\frac{1}{n+1}\left[\sum_{k=1}^{n}k\times(n-k)+\sum_{k=1}^{n}k\right]$$ →$\sum_{k=1}^{n}k=1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$

$$=\frac{1}{n+1}\left[\sum_{k=1}^{n}k\times(n-k)+\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}k\times(n-k)+\frac{1}{n+1}\times\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{1}{n+1}\times\frac{n}{n}\times\sum_{k=1}^{n}k\times(n-k)+\frac{n}{2}$$

$$=\frac{n}{n+1}\times\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k\times(n-k)+\frac{n}{2}$$ →on reconnait $S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k\times(n-k)$

$$=\frac{n}{n+1}\times S_n+\frac{n}{2}$$ →or par hypothèse : $S_n=\frac{n^2-1}{6}$

$$=\frac{n}{n+1}\times\frac{n^2-1}{6}+\frac{n}{2}$$

$$=\frac{n}{n+1}\times\frac{(n+1)(n-1)}{6}+\frac{n}{2}$$

$$=\frac{n(n-1)}{6}+\frac{n}{2}$$

$$=\frac{n^2-n}{6}+\frac{3n}{6}$$

$$=\frac{n^2+2n}{6}$$

et l'hédérité est vérifiée.

Par récurrence, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $S_n=\frac{n^2-1}{6}=\frac{1}{6}n^2-\frac{1}{6}$.

Par produit et somme, la suite (S_n) ne converge pas.

Exercice 4 :

On considère la suite (u_n) définie par $u_1=1$ et pour tout entier $n\geq 1$:

$$u_{n+1}=\frac{n\times u_n+4}{n+1}.$$

Démontrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

La relation s'écrit également :

$$(n+1)u_{n+1} = n\times u_n + 4.$$

On pose, pour tout entier $n\geq 1$, la suite (v_n) définie par :

$$v_n = n\times u_n$$

Ainsi : $\quad v_{n+1} = (n+1)u_{n+1}$

La relation initiale devient :

$$v_{n+1} = v_n + 4.$$

La suite (v_n) est arithmétique de raison $r=4$ et de premier terme : $v_1 = 1\times u_1 = 1$.

Son expression générale est :

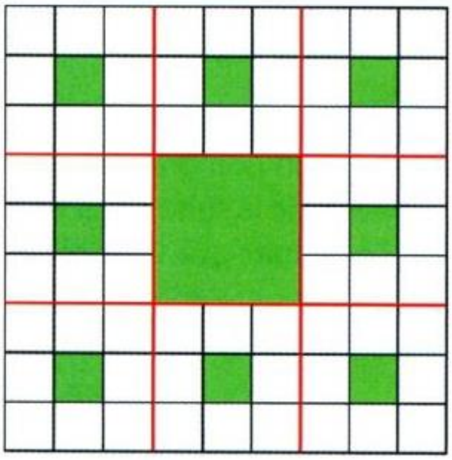
$$v_n = v_1 + (n-1)r = 1 + 4(n-1) = 4n-3.$$

On en déduit :

$$u_n = \frac{v_n}{n} = \frac{4n-3}{n}.$$

Ainsi : $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4n-3}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n\left(4-\frac{3}{n}\right)}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} 4-\dfrac{3}{n} = 4.$

Exercice 5 : Tapis de Sierpinsky



Un carré d'aire $1\ \mathrm{m}^2$ est divisé en neuf carrés identiques comme indiqué sur la figure ci-contre. On colorie le carré central. Les huit carrés restant sont à leur tour divisés en neuf carrés. On poursuit avec la même méthode la division et le coloriage du carré.

Pour tout nombre entier naturel $n\geq 1$, on note A_n l'aire, en m^2, de la surface totale colorée après n coloriages. On a ainsi $A_1 = \frac{1}{9}$.

1) *Expliquer pourquoi pour tout entier naturel, $A_{n+1} = \frac{8}{9}A_n + \frac{1}{9}$.*

TROIS METHODES : la troisième est la plus rapide

Dans chacun des huit carrés restants, on colorie $\frac{1}{9}$ de l'aire.

$$A_2 = 8\times\frac{1}{9}A_1 + A_1 = \frac{8}{9}A_1 + \frac{1}{9} = \frac{8}{9}A_1 + A_1 = \frac{17}{9}A_1$$

$$A_3 = 8^2\times\left(\frac{1}{9}\right)^2 A_1 + A_2 = \left(\frac{8}{9}\right)^2\times\frac{9}{17}A_2 + A_2 = \frac{64}{9\times 17}A_2 + A_2 = \frac{64}{153}A_2 + \frac{153}{153}A_2 = \frac{217}{153}A_2$$

$$= \left(\frac{136}{153}+\frac{81}{153}\right)A_2 = \frac{136}{153}A_2 + \frac{9}{17}A_2 = \frac{8}{9}A_2 + A_1 = \frac{8}{9}A_2 + \frac{1}{9} = \frac{8}{9}\times\frac{17}{9}A_1 + A_1 = \frac{217}{81}A_1$$

$$A_4 = 8^3\times\left(\frac{1}{9}\right)^3 A_1 + A_3 = \left(\frac{8}{9}\right)^3\times\frac{81}{217}A_3 + A_3 = \frac{512}{9\times 217}A_3 + A_3 = \frac{2465}{1953}A_3 = \left(\frac{8}{9}+\frac{81}{217}\right)A_3$$

$$= \frac{8}{9}A_3 + \frac{81}{217}A_3 = \frac{8}{9}A_3 + A_1 = \frac{8}{9}A_3 + \frac{1}{9} = \frac{8}{9}\times\frac{217}{81}A_1 + A_1 = \frac{2465}{729}A_1$$

Hérédité : supposons qu'il existe un rang $n>1$ tel que $A_{n+1} = \frac{8}{9}A_n + \frac{1}{9}$

→ cela implique-t-il $A_{n+2} = \frac{8}{9}A_{n+1} + \frac{1}{9}$?

$$A_{n+2} = 8^{n+1} \times \left(\frac{1}{9}\right)^{n+1} A_1 + A_{n+1}$$ .... bien compliqué !

AUTRE METHODE :

$$A_1 = \frac{1}{9}$$

$$A_2 = 8 \times \frac{1}{9} A_1 + A_1 = \frac{8}{9} A_1 + \frac{1}{9}$$

$$A_3 = \frac{8}{9}(A_2 - A_1) + A_2 = \frac{8}{9} A_2 - \frac{8}{9} A_1 + \frac{8}{9} A_1 + \frac{1}{9} = \frac{8}{9} A_2 - \frac{8}{81} + \frac{8}{81} + \frac{1}{9} = \frac{8}{9} A_2 + \frac{1}{9}$$

$$A_4 = \frac{8}{9}(A_3 - A_2) + A_3 = \frac{8}{9} A_3 - \frac{8}{9} A_2 + \frac{8}{9} A_2 + \frac{1}{9} = \frac{8}{9} A_3 + \frac{1}{9}$$

Initialisation vérifiée

Hérédité : supposons qu'il existe un rang $n > 1$ tel que $A_{n+1} = \frac{8}{9} A_n + \frac{1}{9}$

→ cela implique-t-il $A_{n+2} = \frac{8}{9} A_{n+1} + \frac{1}{9}$?

$$A_{n+2} = \frac{8}{9}(A_{n+1} - A_n) + A_{n+1} = \frac{8}{9} A_{n+1} - \frac{8}{9} A_n + \frac{8}{9} A_n + \frac{1}{9} = \frac{8}{9} A_{n+1} + \frac{1}{9}$$: en injectant l'hypothèse

L'hérédité est vérifiée.

Par **récurrence**, pour tout entier naturel $n > 1$, $A_{n+1} = \frac{8}{9} A_n + \frac{1}{9}$

TROISIEME METHODE

À l'étape $n+1$ vous avez l'aire précédente plus $\frac{1}{9}$ de l'aire qui reste à colorier :

$$A_{n+1} = A_n + \frac{1}{9}(1 - A_n) = \frac{8}{9} A_n + \frac{1}{9}$$ (tout simplement !!!)

2) *Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on pose $B_n = A_n - 1$. Quelle est la nature de la suite (B_n) ? Exprimer A_n en fonction de n.*

$$B_{n+1} = A_{n+1} - 1 = \frac{8}{9} A_n + \frac{1}{9} - 1 = \frac{8}{9} A_n - \frac{8}{9} = \frac{8}{9}(A_n - 1) = \frac{8}{9} B_n$$

La suite (B_n) est géométrique de raison $q = \frac{8}{9}$ et de premier terme $B_1 = A_1 - 1 = \frac{1}{9} - 1 = -\frac{8}{9}$.

Pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$B_n = B_1 \times q^{n-1} = -\frac{8}{9} \times \left(\frac{8}{9}\right)^{n-1} = -\left(\frac{8}{9}\right)^n$$

et : $A_n = B_n + 1 = 1 - \left(\frac{8}{9}\right)^n$

3) *Déterminer à partir de combien d'étapes on aura colorié 85% du carré.*

$$A_n \geq 0,85$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - \left(\frac{8}{9}\right)^n \geq 0,85$$

$$\Leftrightarrow \quad -\left(\frac{8}{9}\right)^n \geq 0,85 - 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{8}{9}\right)^n \leq 0{,}15$$

$$\Leftrightarrow \ln\left[\left(\frac{8}{9}\right)^n\right] \leq \ln 0{,}15$$

$$\Leftrightarrow n \times \ln\left(\frac{8}{9}\right) \leq \ln 0{,}15$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0{,}15}{\ln\left(\frac{8}{9}\right)}$$

$$\Leftrightarrow n \geq 16{,}1$$

On aura colorié au moins 85% du carré à partir de la 17ème itération.

4) *Supposons maintenant qu'au lieu de colorier les parties du carré, on les évide. Cet objet est fractal et appelé le* ***tapis de Sierpinsky****. Déterminer à partir de combien d'étapes on aura évidé 99% du carré initial.*

$$A_n \geq 0{,}99$$

$$\Leftrightarrow 1-\left(\frac{8}{9}\right)^n \geq 0{,}99$$

$$\Leftrightarrow -\left(\frac{8}{9}\right)^n \geq 0{,}99-1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{8}{9}\right)^n \leq 0{,}01$$

$$\Leftrightarrow \ln\left[\left(\frac{8}{9}\right)^n\right] \leq \ln 0{,}01$$

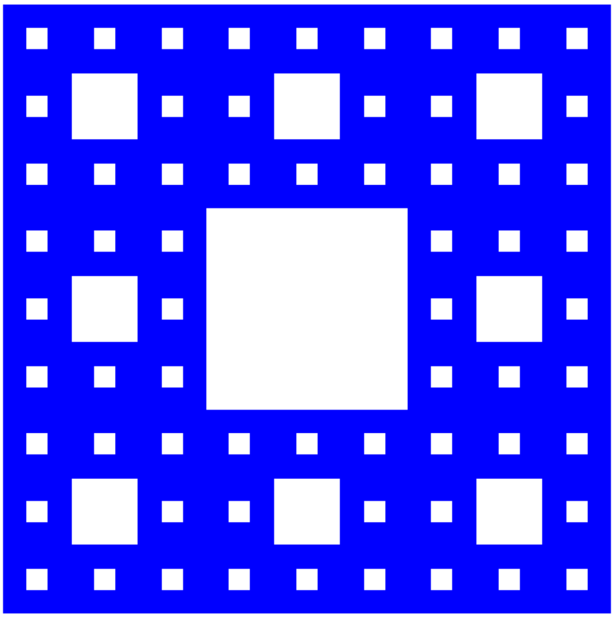
$$\Leftrightarrow n \times \ln\left(\frac{8}{9}\right) \leq \ln 0{,}01$$

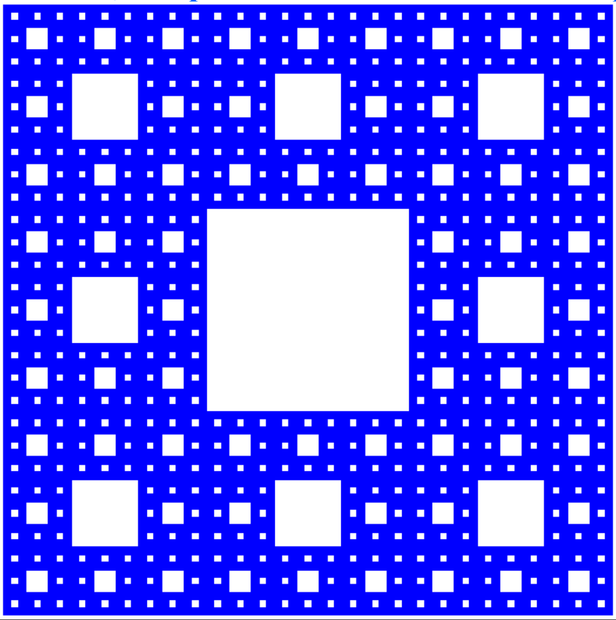
$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0{,}01}{\ln\left(\frac{8}{9}\right)}$$

$$\Leftrightarrow n \geq 39{,}09$$

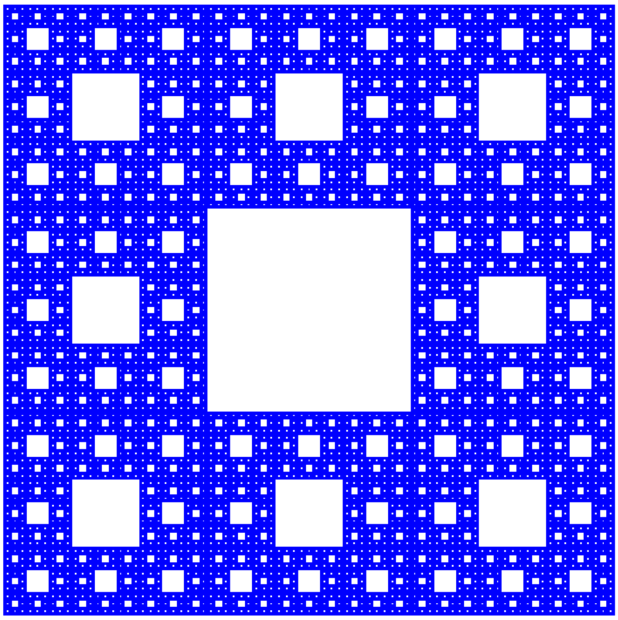
On aura évidé au moins 99% du carré initial à partir de la 17ème itération.

Pour n = 3	Pour n = 4

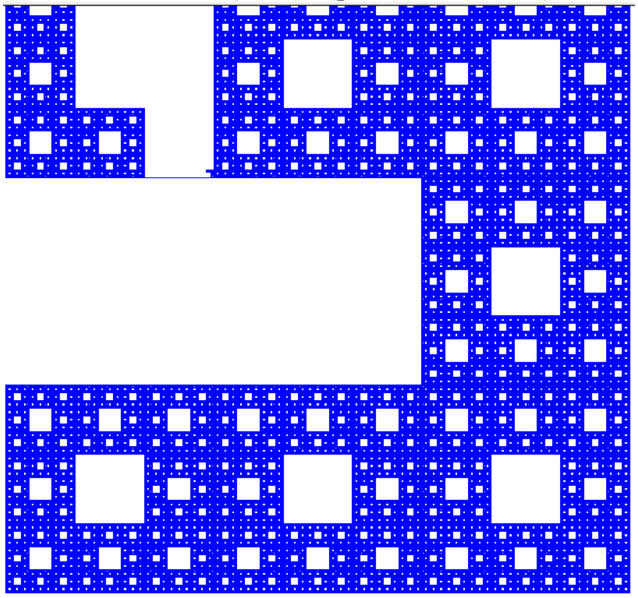




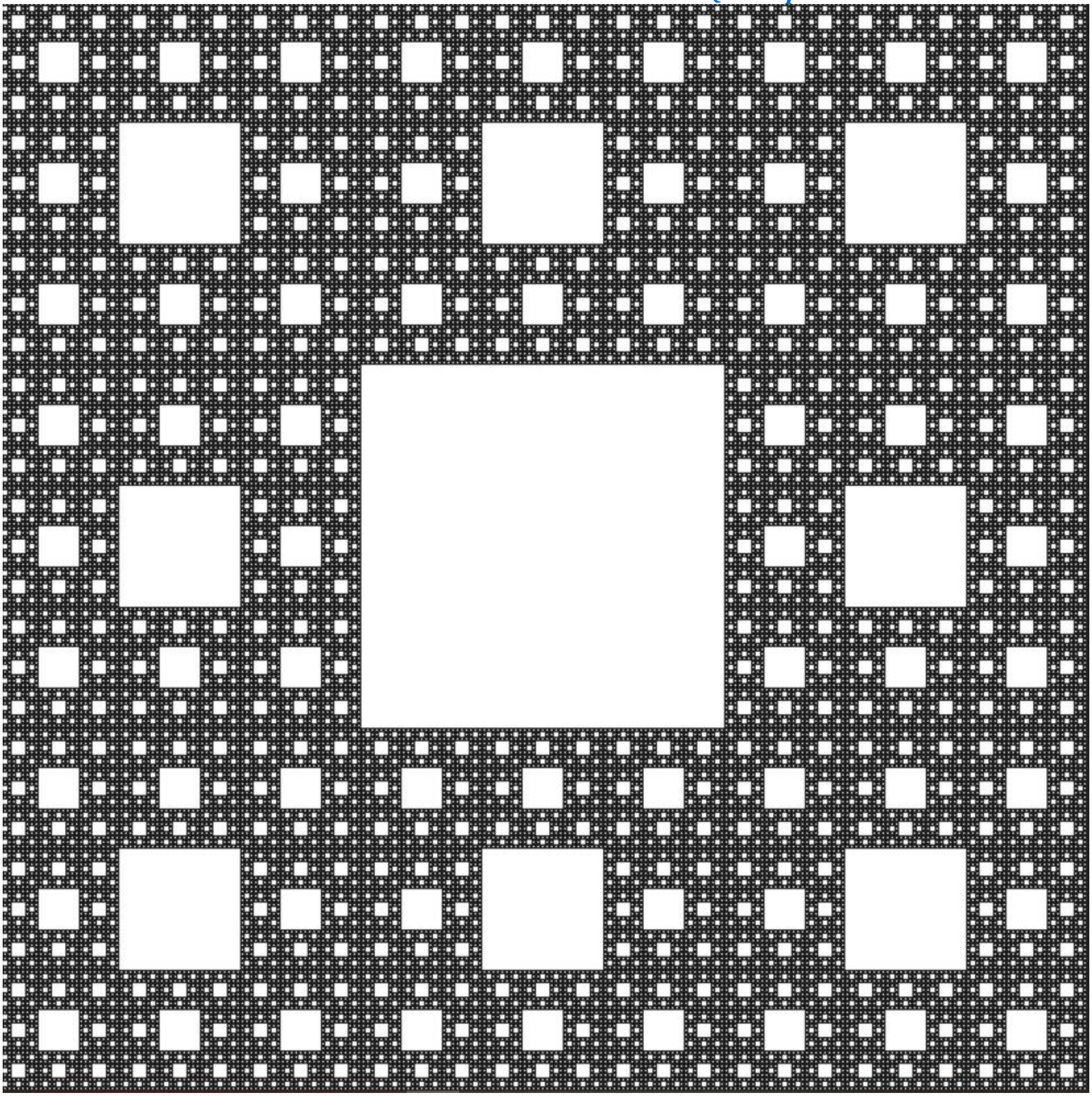
Pour n = 5



Pour n = 6 (dsl : bug à la réalisation)



A la $7^{\text{ème}}$ itération, on obtient :



Programme Python :

```
from turtle import *

def s(n, l):

    if n == 0: # stop conditions

        # draw filled rectangle

        color('blue')
        begin_fill()
        for _ in range (4):
            forward(l)
            left(90)
        end_fill()
        hideturtle()
    else: # recursion
```

```
        # around center point create 8 smalles rectangles.
        # create two rectangles on every side
        # so you have to repeat it four times

        for _ in range(4):
            # first rectangle
            s(n-1, l/3)
            forward(l/3)

            # second rectangle
            s(n-1, l/3)
            forward(l/3)

            # go to next corner
            forward(l/3)
            left(90)

        # update screen
        update()

    # stop updating screen (to make it faster)
    tracer(0)

    # start
    up()
    setposition(-400,-350)
    down()
    speed(0)
    s(4, 800)

    # event loop
    done()
```

Exercice 6 :

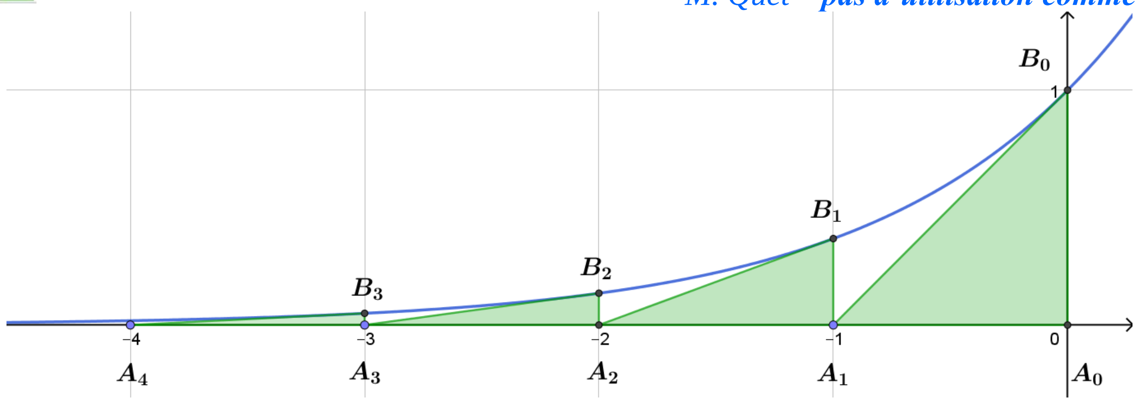
La courbe C représente, dans un repère du plan, la fonction exponentielle. On considère les points $\mathrm{A}_0(0;0)$ *et* $\mathrm{B}_0(0;1)$. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$*:*

B_n *est le point de C de même abscisse* x_n *que* A_n.

A_{n+1} *est le point d'intersection de la tangente à la courbe C au point* B_n *et l'axe des abscisses.*

T_n *est le triangle* $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{A}_{n+1}$.

La somme des aires des triangles $\mathrm{T}_0, \mathrm{T}_1, \cdots, \mathrm{T}_n$ *admet-elle une limite quand n tend vers* $+\infty$ *?*



Première partie :

Vérifions que toutes les tangentes passent bien par les points d'abscisses entières et d'ordonnées nulles.
L'équation de la tangente en tout point d'abscisse a est donnée par :

$$y = f'(a)\times(x-a)+f(a) = e^a(x-a)+e^a = e^a(x-a+1)$$

Ainsi la tangente au point d'abscisse $a=0$ est :

$y = e^0(x-0+1) = x+1$ et cette tangente si $x+1=0$ donc au point d'abscisse $x=-1$.

En généralisant, toute tangente d'abscisse entière a, s'annule si :

$$x-a+1=0$$

Soit $\quad x = a-1$

Ce qui confirme que toute tangente à la courbe exponentielle au point d'abscisse $(a;e^a)$ passe par le point de coordonnées $(a-1;0)$.

Deuxième partie :

L'aire du triangle T_0 est : $\dfrac{1\times e^0}{2} = \dfrac{1}{2}$.

L'aire du triangle T_1 est : $\dfrac{1\times e^{-1}}{2} = \dfrac{1}{2e}$.

L'aire du triangle T_2 est : $\dfrac{1\times e^{-2}}{2} = \dfrac{1}{2e^2}$.

L'aire du triangle T_n est : $\dfrac{1\times e^{-n}}{2} = \dfrac{1}{2e^n}$.

La somme $\mathrm{T}_0+\mathrm{T}_1+\ldots+\mathrm{T}_n = \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2e}+\dfrac{1}{2e^2}+\ldots+\dfrac{1}{2e^n} = \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{e}+\dfrac{1}{e^2}+\ldots+\dfrac{1}{e^n}\right)$.

On reconnait dans la parenthèse la somme des termes d'une suite géométrique (v_n) de premier terme $v_0 = 0$ et de raison $q = \dfrac{1}{e}$.

La somme $\mathrm{T}_0+\mathrm{T}_1+\ldots+\mathrm{T}_n$ vaut :

$$v_0\times\frac{1-q^{\text{nb de termes}}}{1-q} = \frac{1}{2}\times\frac{1-\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{e}} = \frac{1}{2}\times\frac{1-\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}}{\frac{e-1}{e}} = \frac{e}{2(e-1)}\left[1-\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}\right].$$

$0<\dfrac{1}{e}<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{e}\right)^{n+1} = 0^+$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{T}_0+\mathrm{T}_1+\ldots+\mathrm{T}_n = \dfrac{e}{2(e-1)}$.

Exercice 7 :

On considère la suite (u_n) *définie par* $u_0 = 2$ *et pour tout entier* $n \geq 1$ *:*

$$u_n = u_{n-1} + 4n + 1.$$

Exprimer u_n *en fonction de* n.

Il faut penser à faire la somme des termes de la suite, on pose :

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n \\ &= u_0 + (u_0 + 4\times1+1) + (u_1 + 4\times2+1) + \ldots + (u_{n-1} + 4\times n+1) \end{aligned}$$

La relation :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_0 + (u_0 + 4\times1+1) + (u_1 + 4\times2+1) + \ldots + (u_{n-1} + 4\times n+1)$$

se simplifie :

$$\begin{aligned} u_n &= u_0 + (4\times1+1) + (4\times2+1) + \ldots + (4\times n+1) \\ &= u_0 + 4\times(1+2+\ldots+n) + n\times1 \\ &= 2 + 4\times\frac{n(n+1)}{2} + n \\ &= 2 + 2n(n+1) + n \\ &= 2 + 2n^2 + 2n + n \\ &= 2n^2 + 3n + 2 \end{aligned}$$

REMARQUE !!!

Si l'énoncé avait utilisé la relation équivalente classique :

$$u_{n+1} = u_n + 4n + 5$$

il faut d'abord définir le rang n :

$$u_{n+1} = u_n + 4n + 4 + 1 = u_n + 4(n+1) + 1$$

donc :

$$u_n = u_{n-1} + 4n + 1$$

Vérifications avec les premiers termes :

$u_1 = u_0 + 4\times1+1 = 2+4+1 = 7$ → $2\times1^2 + 3\times1 + 2 = 2+3+2 = 7$

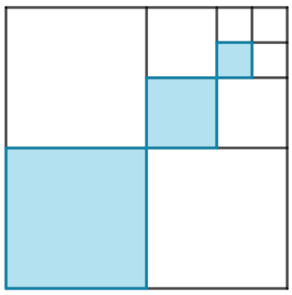
$u_2 = u_1 + 4\times2+1 = 7+8+1 = 16$ → $2\times2^2 + 3\times2 + 2 = 8+6+2 = 16$

$u_3 = u_2 + 4\times3+1 = 16+12+1 = 29$ → $2\times3^2 + 3\times3 + 2 = 18+9+2 = 29$

Cela semble correct !

Exercice 8 :

On partage un carré de côté 1 en quatre carrés de même aire et on colorie le carré inférieur gauche.
On applique ce même procédé au carré supérieur droit et ainsi de suite, comme sur la figure ci-contre.
Vers quelle valeur semble se rapprocher l'aire coloriée lorsque l'on répète indéfiniment ce procédé ? Pourquoi ?



On considère que le grand carré extérieur possède une aire égale à 1.

L'aire du premier carré colorié est donc égale à $\frac{1}{4}$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite représentant l'aire de chaque nouveau carré colorié obtenu. On a :

$$u_0 = \frac{1}{4}.$$

L'aire du deuxième carré colorié est égale à $\frac{1}{4}$ de l'aire du premier carré colorié, donc :

$$u_1 = \frac{1}{4}u_0.$$

L'aire de chaque nouveau carré colorié sera égale à $\frac{1}{4}$ de l'aire du précédent carré colorié, donc pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de premier terme $u_0 = \frac{1}{4}$ et de raison $q = \frac{1}{4}$.

La somme des aires de ces carrés est donnée par :

$$u_0 + u_1 + ... + u_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{4} \times \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \times \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{4^{n+1}}\right)$$

Si on répète ce procédé indéfiniment :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{4^{n+1}} = 0$$

et l'aire totale coloriée tend donc vers le tiers de l'aire du carré de départ.

La Merci MONTPELLIER

Exercice 9

Soit la suite (w_n) dont les termes vérifient, pour tout entier $n>1$: $\begin{cases} w_0 = 1 \\ nw_n = (n+1)w_{n-1} + 1 \end{cases}$.

On obtient les premiers termes suivants :

w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9
1	*3*	*5*	*7*	*9*	*11*	*13*	*15*	*17*	*19*

1) *Détailler le calcul permettant d'obtenir* w_{10}.

$$10w_{10} = (10+1)w_{10-1} + 1$$
$$\Leftrightarrow\ 10w_{10} = 11w_9 + 1$$
$$\Leftrightarrow\ w_{10} = \frac{11w_9+1}{10} = \frac{11\times19+1}{10} = \frac{210}{10} = 21$$

2) *Quelle conjecture peut-on faire sur la nature de la suite* (w_n) *?*

Démontrer cette conjecture puis calculer w_{2021}.

La suite (w_n) semble être arithmétique de raison 2 et de premier terme $w_0 = 1$.

Pour tout entier naturel *n* :

$$w_n - w_{n-1} = \frac{(n+1)w_{n-1}+1}{n} - w_{n-1} = \frac{(n+1)w_{n-1}}{n} + \frac{1}{n} - \frac{nw_{n-1}}{n} = \frac{w_{n-1}}{n} + \frac{1}{n}$$

Cela n'aboutit pas. Testons la technique de récurrence :

Initialisation : $w_0 = 1$ et $w_1 = 3$: l'initialisation est vérifiée.

Hérédité : supposons qu'il existe un rang *n* tel que : $w_n - w_{n-1} = 2$, cela implique-t-il $w_{n+1} - w_n = 2$?

Par définition :

$$w_{n+1}-w_n=\frac{(n+2)w_n+1}{n+1}-\frac{(n+1)w_{n-1}+1}{n}$$
$$=\frac{\left[(n+2)w_n+1\right]\times n}{(n+1)n}-\frac{\left[(n+1)w_{n-1}+1\right](n+1)}{n(n+1)}$$
$$=\frac{\left(n^2+2n\right)w_n-\left(n^2+2n+1\right)w_{n-1}+n-(n+1)}{(n+1)n}$$
$$=\frac{\left(n^2+2n\right)\left(w_n-w_{n-1}\right)-w_{n-1}-1}{(n+1)n}$$
$$=\frac{\left(n^2+2n\right)\times 2-w_{n-1}-1}{n^2+n}$$
$$=\frac{\left(n^2+n\right)\times 2+2n-w_{n-1}-1}{n^2+n}$$
$$=2+\frac{2n-w_{n-1}-1}{n^2+n}=\ldots=2$$ → **démonstration à terminer**

$$w_n=w_0+nr=1+2n$$
$$w_{2021}=1+2\times 2021=4043.$$

Exercice 10

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0=0$ et $u_{n+1}=\dfrac{2u_n+3}{u_n+4}$.

1) *On pose $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+3}$. Montrer que la suite (v_n) est géométrique.*

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{\dfrac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+3}}{\dfrac{u_n-1}{u_n+3}}=\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+3}\times\frac{u_n+3}{u_n-1}=\frac{\dfrac{2u_n+3}{u_n+4}-1}{\dfrac{2u_n+3}{u_n+4}+3}\times\frac{u_n+3}{u_n-1}=\frac{\dfrac{2u_n+3}{u_n+4}-\dfrac{u_n+4}{u_n+4}}{\dfrac{2u_n+3}{u_n+4}+\dfrac{3(u_n+4)}{u_n+4}}\times\frac{u_n+3}{u_n-1}$$
$$=\frac{\dfrac{u_n-1}{u_n+4}}{\dfrac{2u_n+3}{u_n+4}+\dfrac{3u_n+12}{u_n+4}}\times\frac{u_n+3}{u_n-1}=\frac{\dfrac{u_n-1}{u_n+4}}{\dfrac{5u_n+15}{u_n+4}}\times\frac{u_n+3}{u_n-1}=\frac{u_n-1}{u_n+4}\times\frac{u_n+4}{5u_n+15}\times\frac{u_n+3}{u_n-1}$$
$$=\frac{u_n+3}{5u_n+15}=\frac{u_n+3}{5(u_n+3)}=\frac{1}{5}.$$

$v_{n+1}=\dfrac{1}{5}v_n$: la suite (v_n) est géométrique de raison $q=\dfrac{1}{5}$ et de premier terme $v_0=\dfrac{u_0-1}{u_0+3}=-\dfrac{1}{3}$.

2) *Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.*

$$v_n=v_0\times q^n=-\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{5}\right)^n$$
$$v_n=\frac{u_n-1}{u_n+3}\iff v_n(u_n+3)=u_n-1\iff v_nu_n+3v_n=u_n-1\iff v_nu_n-u_n=-1-3v_n$$

$$\Leftrightarrow\ (v_n-1)u_n=-1-3v_n\ \Leftrightarrow\ u_n=\frac{-1-3v_n}{v_n-1}\ \Leftrightarrow\ u_n=\frac{3v_n+1}{1-v_n}$$

$$\Leftrightarrow\ u_n=\frac{3\left(-\frac{1}{3}\right)\times\left(\frac{1}{5}\right)^n+1}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)\times\left(\frac{1}{5}\right)^n}=\frac{-\left(\frac{1}{5}\right)^n+1}{1+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{5}\right)^n}$$

3) *Déterminer la limite de (v_n) puis celle de (u_n).*

$0<\frac{1}{5}<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$.

Exercice 11 :

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0=0$ et pour tout entier $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}+u_n=n$.

Exprimer u_n en fonction de n.

On a :

$$u_{n+1}+u_n=n$$

Donc : $u_{n+2}+u_{n+1}=n+1$

Par soustraction :

$$u_{n+2}-u_n=1$$

$$\Leftrightarrow\ u_{n+2}=u_n+1$$

Les sous-suites de rang pair et impair sont respectivement arithmétiques de raison 1.

Ainsi la suite (u_n) est définie par :

$$(u_n):\begin{cases}u_0=0\\u_1=0\\u_{2n+1}=u_{2n+1}=n\end{cases}$$

Exercice 12 :

Sur une île chaque jour et dans cet ordre, chaque loup tue un mouton, chaque mouton tue un serpent et chaque serpent tue un loup. Après 10 jours il ne reste plus sur l'île qu'un mouton et aucun autre animal.
Combien y avait-il d'animaux de chaque espèce au départ ?

Soient L_n, M_n et S_n le nombre respectif de loups, moutons et serpents après *n* jours.

On a alors :

$$\begin{cases}M_n=M_{n-1}-L_{n-1}\\S_n=S_{n-1}-M_n\\L_n=L_{n-1}-S_n\end{cases}$$

On obtient alors :

$$\begin{cases}M_n+L_{n-1}=M_{n-1}\\S_n+M_n=S_{n-1}\\L_n+S_n=L_{n-1}\end{cases}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}M_n+L_n+S_n=M_{n-1}\\S_n+M_n=S_{n-1}\\L_n+S_n=L_{n-1}\end{cases}$$

On sait que $M_{10}=1$, $S_{10}=0$ et $L_{10}=0$

Avec un tableur, on obtient :

	A	B	C	D	E	F	G	H
1				**Moutons**	**Loups**	**Serpents**		
2	Après	10	jours	1	0	0	début jour	11
3	Après	9	jours	1	0	1	début jour	10
4	Après	8	jours	2	1	2	début jour	9
5	Après	7	jours	5	3	4	début jour	8
6	Après	6	jours	12	7	9	début jour	7
7	Après	5	jours	28	16	21	début jour	6
8	Après	4	jours	65	37	49	début jour	5
9	Après	3	jours	151	86	114	début jour	4
10	Après	2	jours	351	200	265	début jour	3
11	Après	1	jours	816	465	616	début jour	2
12			**Départ**	1897	1081	1432	début jour	1

Exercice 13 :

On note M_0 *le mot ab et pour tout entier naturel n, le mot* M_{n+1} *se construit à partir du mot* M_n *en remplaçant tous les a par ab et tous les b par bab.*

Ainsi, $M_0 = ab$, $M_1 = abbab$ *et* $M_2 = abbabbababbab$.

1. *Quelle est la longueur du mot* M_{10} *?*
2. *Combien de b contient le mot* M_{10} *?*

On note a_n et b_n respectivement le nombre de *a* et de *b* dans le mot M_{10} .

On a :

$$a_0 = 1,\ a_1 = 2,\ a_2 = 5$$

$$b_0 = 1,\ b_1 = 3,\ b_2 = 8$$

Chaque *a* dans M_n va être remplacé par *ab* dans M_{n+1} donc va "engendrer" un seul *a*.

Chaque *b* dans M_n va être remplacé par *bab* dans M_{n+1} donc va "engendrer" un seul *a*.

Donc $a_{n+1} = a_n + b_n$.

Chaque *a* dans M_n va être remplacé par *ab* dans M_{n+1} donc va "engendrer" un seul *b*.

Chaque *b* dans M_n va être remplacé par *bab* dans M_{n+1} donc va "engendrer" un *b* de plus.

Donc $b_{n+1} = a_n + 2b_n$.

Si on note L_n la longueur du mot M_n , on a : $L_n = a_n + b_n$.

En effectuant les calculs de proche en proche, on peut facilement trouver a_{10}, b_{10} et L_{10}.

Par exemple :

$$a_3 = a_2 + b_2 = 5 + 8 = 13$$

$$b_3 = a_2 + 2b_2 = 5 + 16 = 21$$

$$a_4 = a_3 + b_3 = 13 + 21 = 34$$

$$b_4 = a_3 + 2b_3 = 13 + 42 = 55$$

etc.

Pour accélérer les calculs, on peut utiliser un tableur :

	A	B	C	D
1	n	a_n	b_n	L_n
2	0	1	1	2
3	1	2	3	5
4	2	5	8	13
5	3	13	21	34
6	4	34	55	89
7	5	89	144	233
8	6	233	377	610
9	7	610	987	1597
10	8	1597	2584	4181
11	9	4181	6765	10946
12	10	10946	17711	28657

Les formules à taper sont :
Dans A2 : 0, dans B2 : 1, dans C2 : 1, dans D2 : = B2 + C2
Dans A3 : = A2 + 1, dans B3 : = B2 + C2, dans C3 : = B2 + 2*C2, dans D3 : = B3 + C3.
Ensuite, on sélectionne les quatre cellules de A3 à D3, et on fait un "recopier vers le bas", jusqu'à la ligne 12 pour obtenir a_{10}, b_{10} et L_{10}.

On lit : La longueur du mot M_{10} est $L_{10} = 28657$ et il contient 17711 caractères *b* $\left(b_{10} = 17711\right)$.

On peut aussi réaliser un programme Python qui produit vraiment les différents mots M_n et compte le nombre de *a* et le nombre de *b*, et en déduit le nombre total de caractères.
Premier essai jusqu'au troisième rang :

```
m = "ab"
a = 1
b = 1
for i in range(3):
    s = ""
    for c in m:
        if c == "a":
            s = s + "ab"
            b += 1
        else:
            s = s + "bab"
            a += 1
            b += 1
    m = s
    print(m)
```

On obtient :

```
abbab
abbabbababbab
abbabbababbabbababbababbabbababbab
```

On peut généraliser au dixième rang :

```
m = "ab"
a = 1
b = 1
for i in range(10):
```

```
    s = ""
    for c in m:
        if c == "a":
            s = s + "ab"
            b += 1
        else:
            s = s + "bab"
            a += 1
            b += 1
    m = s
print("a=",a,"b=",b,"L=",a+b)
```

On obtient :

a= 10946 b= 17711 L= 28657

Exercice 14 **erreur d'énoncé désolé, si quelqu'un retrouve les bonnes données, je suis preneur**

On considère la suite (u_n) *définie par :* $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{4}u_n + n \end{cases}$ (R).

1) *Déterminer une suite arithmétique* (w_n) *satisfaisant la relation* (R).

On pose $w_{n+1} = w_n + r$, r étant la raison à déterminer. La relation (R) donne :

$$\begin{cases} w_0 = 1 \\ w_{n+1} = \dfrac{1}{4}w_n + n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w_0 = 1 \\ w_n + r = \dfrac{1}{4}w_n + n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w_0 = 1 \\ w_n - \dfrac{1}{4}w_n = n - r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w_0 = 1 \\ \dfrac{3}{4}w_n = n - r \end{cases}.$$

Cette relation étant vraie pour toute valeur de n, elle est également vraie pour $n = 0$:

$$\frac{3}{4}w_0 = 0 - r \Leftrightarrow \frac{3}{4}\times 1 = -r \Leftrightarrow r = -\frac{3}{4}$$

Ainsi : $w_{n+1} = w_n - \dfrac{3}{4}$ avec $w_0 = 1$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $w_n = 1 - \dfrac{3}{4}n$.

2) *On pose* $v_n = u_n - w_n$.

Montrer que la suite (v_n) *est géométrique et préciser sa raison et* v_0.

$$v_{n+1} = u_{n+1} - w_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + n - \left(w_n - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}u_n + n - w_n + \frac{3}{4} = \frac{1}{4}(u_n + 4n - 4w_n + 3)$$

$$= \frac{1}{4}(u_n - w_n - 3w_n + 4n + 3) = \frac{1}{4}\left(u_n - w_n - 3\left(1 - \frac{3}{4}n\right) + 4n + 3\right) = \frac{1}{4}\left(u_n - w_n + \frac{9}{4}n + 4n\right) \ldots\ldots$$

$$v_{n+1} = u_{n+1} - w_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + n - \left(w_n - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}u_n + n - w_n + \frac{3}{4} = \frac{1}{4}(u_n + 4n - 4w_n + 3)$$

3) Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n.

4) a) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n}$.

b) Programmer la suite (u_n) et vérifier les limites trouvées.