

Contrôle sur les suites (2 pages, 1h15)

Rien n'est plus difficile que d'avoir de la suite dans les idées quand on n'en a qu'une. Albert Brie

Exercice 1 :

(3 points)

Déterminer les limites en $+\infty$ des suites suivantes :

a) $u_n = \frac{\sin(n^2)}{n}$ b) $u_n = \sqrt{n} - n$

Exercice 2 :

(8 points)

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{4u_n}{u_n + 4}.$$

- 1) La copie d'écran ci-contre présente les valeurs, calculées à l'aide d'un tableur, des termes de la suite (u_n) pour n variant de 0 à 12, ainsi que celles du quotient $\frac{4}{u_n}$, (avec, pour les valeurs de u_n , affichage de deux chiffres pour les parties décimales).

À l'aide de ces valeurs, conjecturer l'expression de $\frac{4}{u_n}$ en fonction de n .

n	u_n	$\frac{4}{u_n}$
0	1,00	4
1	0,80	5
2	0,67	6
3	0,57	7
4	0,50	8
5	0,44	9
6	0,40	10
7	0,36	11
8	0,33	12
9	0,31	13
10	0,29	14
11	0,27	15
12	0,25	16

Le but de cet exercice est de démontrer cette conjecture (question 5.), et d'en déduire la limite de la suite (u_n) (question 6.).

- 2) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n > 0$.
- 3) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
- 4) Que peut-on conclure des questions 2. et 3. concernant la suite (u_n) ?
- 5) On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{4}{u_n}.$$

Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique.

Préciser sa raison et son premier terme.

En déduire, pour tout entier naturel n , l'expression de v_n en fonction de n .

- 6) Déterminer, pour tout entier naturel n , l'expression de u_n en fonction de n .
En déduire la limite de la suite (u_n) .

Exercice 3 :

En mai 2020, une entreprise fait le choix de développer le télétravail afin de s'inscrire dans une démarche écoresponsable. Elle propose alors à ses 5 000 collaborateurs en France de choisir entre le télétravail et le travail au sein des locaux de l'entreprise.

En mai 2020, seuls 200 d'entre eux ont choisi le télétravail.

Chaque mois, depuis la mise en place de cette mesure, les dirigeants de l'entreprise constatent que 85 % de ceux qui avaient choisi le télétravail le mois précédent choisissent de continuer, et que, chaque mois, 450 collaborateurs supplémentaires choisissent le télétravail.

On modélise le nombre de collaborateurs de cette entreprise en télétravail par la suite (a_n) .

Le terme a_n désigne ainsi une estimation du nombre de collaborateurs en télétravail le n -ième mois après le mois de mai 2020.

Ainsi $a_0 = 200$.

Partie A :

1. Calculer a_1 .
2. Justifier que pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = 0,85a_n + 450$.
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = a_n - 3000$.
 - a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,85.
 - b. Exprimer v_n en fonction de n pour tout entier naturel n .
 - c. En déduire que, pour tout entier naturel n , $a_n = -2800 \times 0,85^n + 3000$.
4. Déterminer le nombre de mois au bout duquel le nombre de télétravailleurs sera strictement supérieur à 2 500, après la mise en place de cette mesure dans l'entreprise.

Partie B :

Afin d'évaluer l'impact de cette mesure sur son personnel, les dirigeants de l'entreprise sont parvenus à modéliser le nombre de collaborateurs satisfaits par ce dispositif à l'aide de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 2}$$

où u_n désigne le nombre de milliers de collaborateurs satisfaits par cette nouvelle mesure au bout de n mois après le mois de mai 2020.

1. Démontrer que la fonction f définie pour tout $x \in [0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{5x+4}{x+2}$ est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
2. a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4.$$
 b. Justifier que la suite (u_n) est convergente.
3. On admet que pour tout entier naturel n , $0 \leq 4 - u_n \leq 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

En déduire la limite de la suite (u_n) et l'interpréter dans le contexte de la modélisation.

*Soignez la rédaction et la présentation !
Bon courage !*