Formules de dérivation

Dérivée d'une fonction de référence dérivable multipliée par un réel *k* :

$$\left(k\times u(x)\right)'=k\times u'(x)$$

Exercice 1B.1 :
Dériver les fonctions suivantes :

$f(x)=5x^2$ $\qquad f(x)=\dfrac{-3}{x}$ $\qquad f(x)=\sqrt{\dfrac{25x}{9}}$

Dérivée de la somme de deux fonctions de référence dérivables :

$$\left(u(x)+v(x)\right)'=u'(x)+v'(x)$$

Exercice 1B.2 :
Dériver les fonctions suivantes :

$f(x)=x^2+9$ $\qquad f(x)=\dfrac{1}{x}+\sqrt{x}$ $\qquad f(x)=2x^3-6x^2+8x-5$

Dérivées du produit de deux fonctions de référence dérivables :

$$\left(u(x)\times v(x)\right)'=u'(x)\times v(x)+u(x)\times v'(x)$$

Exercice 1B.3 :
Dériver les fonctions suivantes :

$f(x)=\left(1-x^2\right)\times\left(2x^3+5x\right)$ $\qquad f(x)=\left(2\sqrt{x}-5\right)\times\left(\dfrac{5}{2x}\right)$

Dérivées du quotient de deux fonctions de référence dérivables :

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'=\frac{u'(x)\times v(x)-u(x)\times v'(x)}{\left(v(x)\right)^2}$$

Exercice 1B.4 :
Dériver les fonctions suivantes :

$f(x)=\dfrac{1-x^2}{2x^3+5x}$ $\qquad f(x)=\dfrac{2\sqrt{x}-5}{3x+2}$ $\qquad f(x)=\dfrac{5x+1}{x^2+x+1}$

Dérivées du carré d'une expression dérivable :

$$\left(u^2(x)\right)'=2\times u(x)\times u'(x)$$

Exercice 1B.5 :
Dériver les fonctions suivantes :

$f(x)=(1-3x)^2$ $\qquad f(x)=\left(2x^3+1\right)^2$

$f(x)=\left(1+\sqrt{x}\right)^2$ $\qquad f(x)=5(3x-7)^2$

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$:

Dérivée d'une fonction de référence dérivable multipliée par un réel *k* :

$$\left(k\times u(x)\right)'=k\times u'(x)$$

Exercice 1B.1 :

$f(x)=5x^2$: f est le produit d'une constante 5 par la fonction dérivable $u(x)=x^2$

ainsi : $f(x)=5\times u(x)$

donc : $f'(x)=5\times u'(x)$ soit : $f'(x)=5\times 2x=10x$

$f(x)=\dfrac{-3}{x}$: f est le produit d'une constante -3 par la fonction dérivable $u(x)=\dfrac{1}{x}$

ainsi : $f(x)=-3\times u(x)$

donc : $f'(x)=-3\times u'(x)$ soit : $f'(x)=-3\times\left(\dfrac{-1}{x^2}\right)=\dfrac{3}{x^2}$

$f(x)=\sqrt{\dfrac{25x}{9}}$: f est le produit d'une constante $\sqrt{\dfrac{25}{9}}=\dfrac{5}{3}$ par la fonction dérivable $u(x)=\sqrt{x}$

ainsi : $f(x)=\dfrac{5}{3}\times u(x)$

donc : $f'(x)=\dfrac{5}{3}\times u'(x)$ soit : $f'(x)=\dfrac{5}{3}\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{5}{6\sqrt{x}}$

Dérivée de la somme de deux fonctions de référence dérivables :

$$\left(u(x)+v(x)\right)'=u'(x)+v'(x)$$

Exercice 1B.2 :

$f(x)=x^2+9$: f est la somme de deux fonctions dérivables $u(x)=x^2$ et $v(x)=9$

ainsi : $f(x)=u(x)+v(x)$

donc : $f'(x)=u'(x)+v'(x)$ soit : $f'(x)=2x+0=2x$

$f(x)=\dfrac{1}{x}+\sqrt{x}$: f est la somme de deux fonctions dérivables $u(x)=\dfrac{1}{x}$ et $v(x)=\sqrt{x}$

ainsi : $f(x)=u(x)+v(x)$

donc : $f'(x)=u'(x)+v'(x)$ soit : $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

on ramène f '(x) sur le même dénominateur : $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}\times\dfrac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\times\dfrac{x^2}{x^2}=\dfrac{x^2-2\sqrt{x}}{2x^2\sqrt{x}}$

$f(x)=2x^3-6x^2+8x-5$: f est la somme de quatre fonctions dérivables :

$u(x)=2x^3$, $v(x)=-6x^2$, $w(x)=+8x$ et $t(x)=-5$

$u'(x)=6x^2$, $v'(x)=-12x$, $w'(x)=8$ et $t'(x)=0$

ainsi : $f(x)=u(x)+v(x)+w(x)+t(x)$

et : $f'(x)=u'(x)+v'(x)+w'(x)+t'(x)$ soit $f'(x)=2\times 3x^2-6\times 2x+8\times 1=6x^2-12x+8$

Dérivées du produit de deux fonctions de référence dérivables :

$$\left(u(x)\times v(x)\right)'=u'(x)\times v(x)+u(x)\times v'(x)$$

Exercice 1B.3 :

$$f(x)=\left(1-x^2\right)\times\left(2x^3+5x\right)$$

f est le produit de deux fonctions dérivables $u(x)=1-x^2$ et $v(x)=2x^3+5x$

on calcule les dérivées des fonctions u et v : $u'(x)=-2x$ et $v'(x)=2\times 3x^2+5=6x^2+5$

ainsi : $f(x)=u(x)\times v(x)$

donc : $f'(x)=u'(x)\times v(x)+u(x)\times v'(x)$

soit : $f'(x)=-2x\times\left(2x^3+5x\right)+\left(1-x^2\right)\times\left(6x^2+5\right)$

et : $f'(x)=-4x^4-10x^2+6x^2+5-6x^4-5x^2$

ainsi : $f'(x)=-10x^4-9x^2+5$

$$f(x)=\left(2\sqrt{x}-5\right)\times\left(\frac{5}{2x}\right)$$

f est le produit de deux fonctions dérivables $u(x)=2\times\sqrt{x}-5$ et $v(x)=\frac{5}{2}\times\frac{1}{x}$

on calcule les dérivées des fonctions u et v : $u'(x)=2\times\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}$ $v'(x)=\frac{5}{2}\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{5}{2x^2}$

ainsi : $f(x)=u(x)\times v(x)$

donc : $f'(x)=u'(x)\times v(x)+u(x)\times v'(x)$

soit : $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\times\left(\frac{5}{2x}\right)+\left(2\sqrt{x}-5\right)\times\left(-\frac{5}{2x^2}\right)$

soit : $f'(x)=\frac{5}{2x\sqrt{x}}-\frac{5\times 2\sqrt{x}}{2x^2}+\frac{25}{2x^2}$

soit : $f'(x)=\frac{5}{2x\sqrt{x}}\times\frac{x}{x}-\frac{5\times 2\sqrt{x}}{2x^2}\times\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}+\frac{25}{2x^2}\times\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

soit : $f'(x)=\frac{5x-10x+25\sqrt{x}}{2x^2\sqrt{x}}=\frac{-5x+25\sqrt{x}}{2x^2\sqrt{x}}\times\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\frac{-5x\sqrt{x}+25x}{2x^2}=\frac{-5\sqrt{x}+25}{2x}=\frac{5}{2}\times\frac{-\sqrt{x}+5}{x}$

Dérivées du quotient de deux fonctions de référence dérivables :

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'=\frac{u'(x)\times v(x)-u(x)\times v'(x)}{\left(v(x)\right)^2}$$

Exercice 1B.4 : *Dériver les fonctions suivantes :*

$$f(x)=\frac{1-x^2}{2x^3+5x}$$

f est le quotient de deux fonctions dérivables $u(x)=1-x^2$ et $v(x)=2x^3+5x$

on calcule les dérivées des fonctions u et v : $u'(x)=-2x$ et $v'(x)=2\times 3x^2+5=6x^2+5$

ainsi : $f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$

donc : $f'(x)=\dfrac{u'(x)\times v(x)-u(x)\times v'(x)}{\left(v(x)\right)^2}$

soit : $f'(x)=\dfrac{-2x\times\left(2x^3+5x\right)-\left(1-x^2\right)\times\left(6x^2+5\right)}{\left(2x^3+5x\right)^2}$

et : $f'(x)=\dfrac{-4x^4-10x^2-\left(6x^2+5-6x^4-5x^2\right)}{\left(2x^3+5x\right)^2}$

ainsi : $f'(x)=\dfrac{-4x^4-10x^2-6x^2-5+6x^4+5x^2}{\left(2x^3+5x\right)^2}$

d'où : $f'(x)=\dfrac{2x^4-11x^2-5}{\left(2x^3+5x\right)^2}$

$f(x)=\dfrac{2\sqrt{x}-5}{3x+2}$

f est le quotient de deux fonctions dérivables $u(x)=2\times\sqrt{x}-5$ et $v(x)=3x+2$

on calcule les dérivées des fonctions u et v : $u'(x)=2\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $v'(x)=3$

ainsi : $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$

donc : $f'(x)=\dfrac{u'(x)\times v(x)-u(x)\times v'(x)}{\left(v(x)\right)^2}$

soit : $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{\sqrt{x}}\times(3x+2)-\left(2\sqrt{x}-5\right)\times 3}{(3x+2)^2}$

soit : $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{\sqrt{x}}\times(3x+2)-6\sqrt{x}+15}{(3x+2)^2}$

soit : $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{\sqrt{x}}\times(3x+2)-\left(6\sqrt{x}+15\right)\times\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{(3x+2)^2}$

soit : $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{\sqrt{x}}\times\left[(3x+2)-\left(6x+15\sqrt{x}\right)\right]}{(3x+2)^2}$

soit : $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{\sqrt{x}}\times\left[3x+2-6x-15\sqrt{x}\right]}{(3x+2)^2}$

soit : $f'(x)=\dfrac{-3x+2-15\sqrt{x}}{\sqrt{x}\times(3x+2)^2}$

$f(x)=\dfrac{5x+1}{x^2+x+1}$ →on pose : $u(x)=5x+1$ et $v(x)=x^2+x+1$

$$u'(x)=5 \quad \text{et} \quad v'(x)=2x+1$$

Ainsi : $$f'(x)=\frac{5\left(x^2+x+1\right)-(5x+1)(2x+1)}{\left(x^2+x+1\right)^2}$$

$$=\frac{5x^2+5x+5-\left(10x^2+5x+2x+1\right)}{\left(x^2+x+1\right)^2}$$

$$=\frac{5x^2+5x+5-10x^2-7x-1}{\left(x^2+x+1\right)^2}$$

$$=\frac{-5x^2-2x+4}{\left(x^2+x+1\right)^2}$$

Dérivées du carré d'une expression dérivable :

$$\left(u^2(x)\right)'=2\times u(x)\times u'(x)$$

Exercice 1B.5 : *Dériver les fonctions suivantes :*

$f(x)=(1-3x)^2$ →on pose : $u(x)=1-3x$ donc $u'(x)=-3$

$$f'(x)=2\times(1-3x)\times(-3)=-6(1-3x)$$

$f(x)=\left(2x^3+1\right)^2$ →on pose : $u(x)=2x^3+1$ donc $u'(x)=2\times 3x^2=6x^2$

$$f'(x)=2\times\left(2x^3+1\right)\times 6x^2=12x^2\left(2x^3+1\right)$$

$f(x)=\left(1+\sqrt{x}\right)^2$ →on pose : $u(x)=1+\sqrt{x}$ donc $u'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$f'(x)=2\times\left(1+\sqrt{x}\right)\times\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

$f(x)=5(3x-7)^2$ →on pose : $u(x)=3x-7$ donc $u'(x)=3$

$$f'(x)=5\times 2(3x-7)\times 3=30(3x-7)$$