Dérivées de fonctions composées

Exercice 2C.1 :

Calculer les dérivées suivantes

a) $f(x)=(x-1)^2(x+1)^3$

b) $f(x)=\dfrac{1}{(4-5x)^3}$

c) $f(x)=\dfrac{(x+1)^3}{(x-2)^2}$

d) $f(x)=\sqrt{2x^2-3x+1}$

e) $f(x)=\left(x^4-x^2+1\right)^3$

f) $f(x)=\dfrac{1}{x^3\left(x^2-1\right)}$

g) $g(x)=\left(\dfrac{3x-1}{2x-4}\right)^4$

h) $f(x)=x\sqrt{x-1}$

i) $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$

j) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}}$

Exercice 2C.2 :

Soit la fonction *f* définie sur $]-\infty;1]$ par : $f(x)=2x\sqrt{1-x}$

1) Déterminer alors la dérivée de la fonction *f* sur l'intervalle $]-\infty;1[$.
2) Dresser le tableau de variation de la fonction *f*. On donnera la valeur exacte de l'extremum de la fonction *f*.

Exercice 2C.3 :

Calculer les dérivées suivantes puis étudier les variations de *f*

a) $f(x)=\dfrac{1}{\left(x^2+1\right)^3}$ sur $\mathbb{R}$

b) $f(x)=\left(2x^3+2x^2\right)^5$ sur $\mathbb{R}$

c) $f(x)=\left(\dfrac{3x^2+5}{x+2}\right)^3$ sur $\mathbb{R}-\{-2\}$

d) $f(x)=\dfrac{3x-5}{\sqrt{x^2+2}}$ sur $\mathbb{R}$

e) $f(x)=\sqrt{\sqrt{3x+1}}$ sur $\left[-\dfrac{1}{3};+\infty\right[$

Exercice 2C.1 :

a) $f(x)=(x-1)^2(x+1)^3$

$$\rightarrow \begin{aligned} f'(x)&=2(x-1)\times1\times(x+1)^3+(x-1)^2\times3(x+1)^2\times1\\ &=2(x-1)(x+1)^3+3(x-1)^2(x+1)^2\\ &=(x-1)(x+1)^2\left[2(x+1)+3(x-1)\right]\\ &=(x-1)(x+1)^2(5x-1)\end{aligned}$$

b) $f(x)=\dfrac{1}{(4-5x)^3}$ $\rightarrow f'(x)=\dfrac{-3\times(-5)}{(4-5x)^4}=\dfrac{15}{(4-5x)^4}$

Autre méthode : $f(x)=\dfrac{1}{(4-5x)^3}=(4-5x)^{-3}$

$\rightarrow f'(x)=-3\times(4-5x)^{-3-1}\times(-5)=15\times(4-5x)^{-4}=\dfrac{15}{(4-5x)^4}$

c) $f(x)=\dfrac{(x+1)^3}{(x-2)^2}$ on pose $u(x)=(x+1)^3$ et $v(x)=(x-2)^2$

donc $u'(x)=3(x+1)^2\times1=3(x+1)^2$ et $v'(x)=2(x-2)^1\times1=2(x-2)$

$$\rightarrow f'(x)=\frac{3(x+1)^2\times(x-2)^2-(x+1)^3\times2(x-2)}{\left((x-2)^2\right)^2}=\frac{(x+1)^2(x-2)\left[3(x-2)-2(x+1)\right]}{(x-2)^4}$$

$$=\frac{(x+1)^2(x-2)[3x-6-2x-2]}{(x-2)^4}=\frac{(x+1)^2(x-2)(x-8)}{(x-2)^4}$$

d) $f(x)=\sqrt{2x^2-3x+1}$ on pose $u(x)=2x^2-3x+1 \rightarrow u'(x)=4x-3$

$\rightarrow f'(x)=\dfrac{4x-3}{2\sqrt{2x^2-3x+1}}$

e) $f(x)=\left(x^4-x^2+1\right)^3$ on pose $u(x)=x^4-x^2+1 \rightarrow u'(x)=4x^3-2x$

$\rightarrow f'(x)=3\left(x^4-x^2+1\right)^2\times\left(4x^3-2x\right)=6x\left(x^4-x^2+1\right)^2\left(2x^2-1\right)$

f) $f(x)=\dfrac{1}{x^3\left(x^2-1\right)}=\dfrac{1}{x^5-x^3}$ on pose $u(x)=x^5-x^3 \rightarrow u'(x)=5x^4-3x^2$

$$\rightarrow f'(x)=\frac{-\left(5x^4-3x^2\right)}{\left(x^5-x^3\right)^2}=\frac{-5x^4+3x^2}{\left(x^5-x^3\right)^2}=\frac{x^2\left(-5x^2+3\right)}{\left(x^5-x^3\right)^2}$$

g) $g(x)=\left(\dfrac{3x-1}{2x-4}\right)^4$

$$\rightarrow g'(x)=4\left(\frac{3x-1}{2x-4}\right)^3\times\frac{3(2x-4)-(3x-1)\times2}{(2x-4)^2}=4\left(\frac{3x-1}{2x-4}\right)^3\times\frac{6x-12-6x+2}{(2x-4)^2}=4\left(\frac{3x-1}{2x-4}\right)^3\times\frac{-10}{(2x-4)^2}$$

h) $f(x)=x\sqrt{x-1}$

$$\rightarrow f'(x)=1\times\sqrt{x-1}+x\times\frac{1}{2\sqrt{x-1}}=\sqrt{x-1}\times\frac{2\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}}+\frac{x}{2\sqrt{x-1}}=\frac{2(x-1)+x}{2\sqrt{x-1}}=\frac{3x-2}{2\sqrt{x-1}}$$

i) $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$ on pose $u(x)=x^2$ et $v(x)=\sqrt{x^2+1}$

donc $u'(x)=2x$ et $v'(x)=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$$\rightarrow f'(x)=\frac{2x\times\sqrt{x^2+1}-x^2\times\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}=\frac{2x\times\sqrt{x^2+1}\times\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}=\frac{\frac{2x\left(x^2+1\right)-x^3}{\sqrt{x^2+1}}}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}$$

$$=\frac{2x^3+2x-x^3}{\sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}=\frac{x^3+2x}{\sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}=\frac{x\left(x^2+2\right)}{\sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}$$

j) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}}$ on pose $u(x)=\sqrt{x^2-1}$ et $v(x)=\sqrt{x^2+1}$

donc $u'(x)=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ et $v'(x)=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$$\rightarrow f'(x)=\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\times\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\times\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}=\frac{\frac{x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2-1}}\times\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{x\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}}\times\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}$$

$$=\frac{\frac{x\left(x^2+1\right)}{\sqrt{x^2-1}\times\sqrt{x^2+1}}-\frac{x\left(x^2-1\right)}{\sqrt{x^2-1}\times\sqrt{x^2+1}}}{\left(x^2+1\right)}=\frac{\left(x^3+x\right)-\left(x^3-x\right)}{\sqrt{x^2-1}\times\sqrt{x^2+1}\left(x^2+1\right)}=\frac{2x}{\sqrt{x^2-1}\times\sqrt{x^2+1}\left(x^2+1\right)}$$

Exercice 2C.2 :

Soit la fonction f définie sur $]-\infty;1]$ *par :* $f(x)=2x\sqrt{1-x}$

0) *Sur quel intervalle la fonction f est-elle dérivable ? Pourquoi ?* **(hors programme)**

Avec les racines carrées, on doit étudier la dérivabilité aux bornes de l'intervalle de définition :

$$\lim_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{2x\sqrt{1-x}}{x-1}=\lim_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{2x\sqrt{1-x}}{-(1-x)}=\lim_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{2x}{-\sqrt{1-x}}=\lim_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{-2x}{\sqrt{1-x}}$$

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}-2x=-2$ on pose $X=1-x$: $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\sqrt{1-x}=\lim\limits_{\substack{X\to0\\X>0}}\sqrt{X}=0^+$

Par quotient : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=-\infty$: la fonction f n'est pas dérivable en $x=1$.

1) *Déterminer alors la dérivée de la fonction f sur l'intervalle* $]-\infty;1[$.

$$\forall x\in]-\infty;1[\ :\ f'(x)=2\times\sqrt{1-x}+2x\times\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}=2\sqrt{1-x}\times\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}}-\frac{x}{\sqrt{1-x}}$$

$$= \frac{2(1-x)}{\sqrt{1-x}} - \frac{x}{\sqrt{1-x}} = \frac{2-3x}{\sqrt{1-x}}$$

1) *Dresser le tableau de variation de la fonction f. On donnera la valeur exacte de l'extremum de la fonction f.*

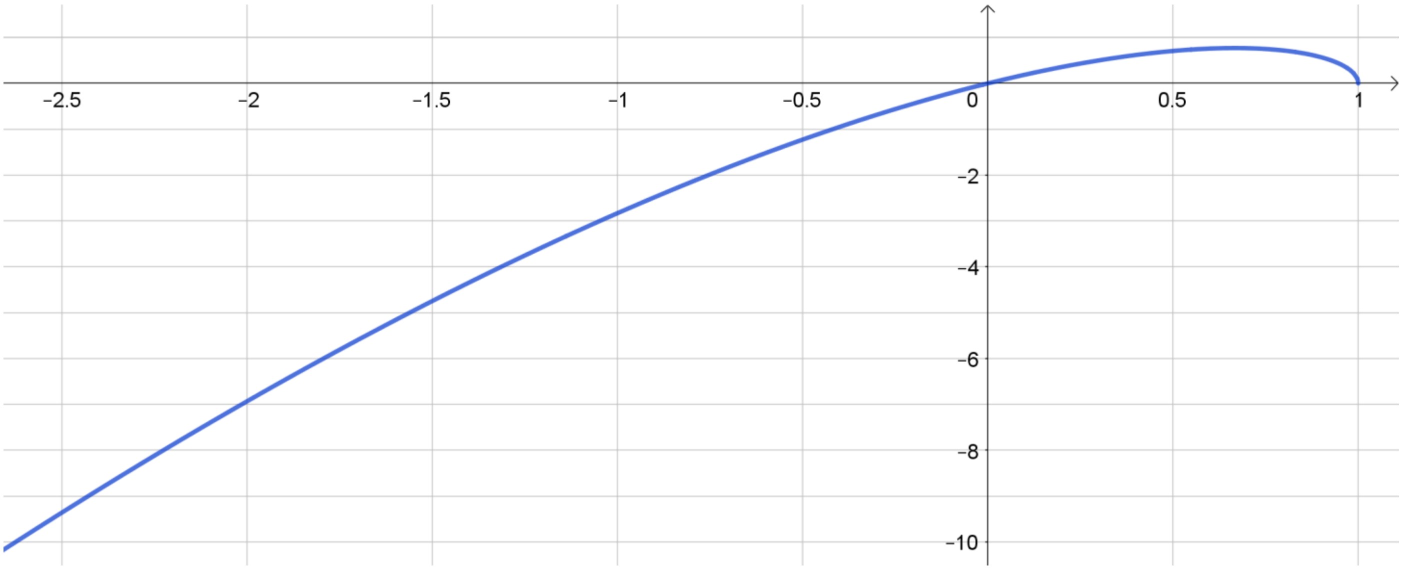
Le dénominateur est strictement positif en tant que racine carrée d'une expression.

$$2-3x>0 \iff -3x>-2 \iff x<\frac{-2}{-3} \iff x<\frac{2}{3}$$

Tableau de variation de f sur $]-\infty;1]$:

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$0,77$	$\searrow$	0

Le maximum de la fonction *f* est $f\left(\frac{2}{3}\right) = 2\times\frac{2}{3}\sqrt{1-\frac{2}{3}} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} \simeq 0,77$



Exercice 2C.3 :

Calculer les dérivées suivantes $\left(\frac{1}{(U(x))^n}\right)' = \frac{-n\times U'(x)}{(U(x))^{n+1}}$

a) $f(x) = \frac{1}{(x^2+1)^3}$ on pose $u(x) = x^2+1 \rightarrow u'(x) = 2x$

f est dérivable en tant que quotient de polynômes :

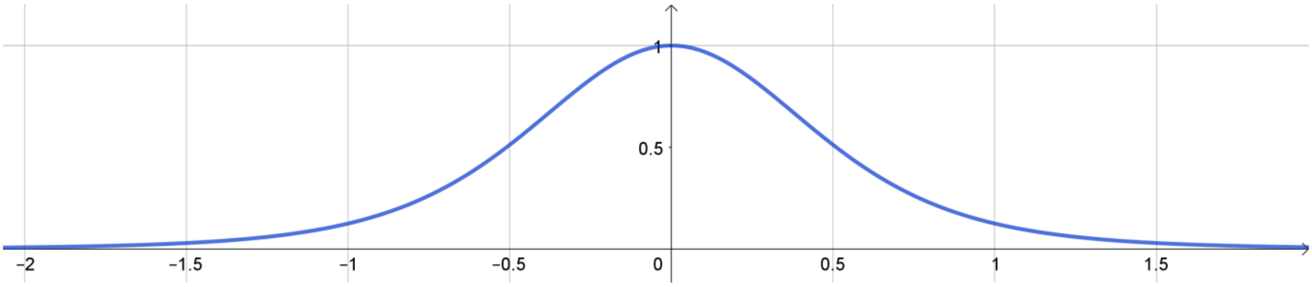
$$\rightarrow f'(x) = \frac{-3\times 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{-6x}{(x^2+1)^4}$$

Autre méthode : $f(x) = (x^2+1)^{-3}$

$$\rightarrow f'(x) = -3\left(x^2+1\right)^{-3-1} \times 2x = -6x\left(x^2+1\right)^{-4} = \frac{-6x}{\left(x^2+1\right)^4}$$

Si $x>0$, alors $f'(x)<0$ et la fonction est décroissante.

Si $x<0$, alors $f'(x)>0$ et la fonction est croissante.



b) $f(x) = \left(2x^3+2x^2\right)^5$ on pose $u(x) = 2x^3+2x^2 \rightarrow u'(x) = 6x^2+4x$

f est dérivable en tant que fonction polynômiale :

$$\rightarrow f'(x) = 5\left(2x^3+2x^2\right)^4 \times \left(6x^2+4x\right) = 10x\left(2x^3+2x^2\right)^4(3x+2)$$

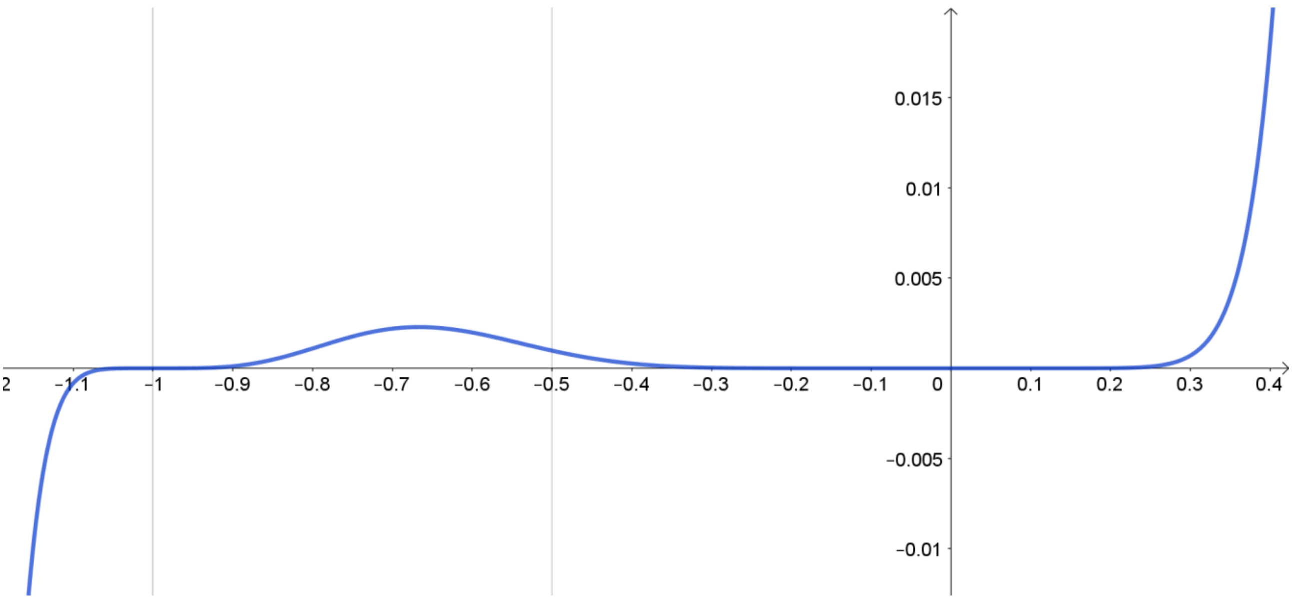
$10\left(2x^3+2x^2\right)^4 \geq 0$ donc il faut étudier le signe de $x(3x+2) = 3x^2+2x$

$$\rightarrow \Delta = 2^2 = 4 \quad , \quad x_1 = \frac{-2-2}{2\times 3} = \frac{-2}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-202}{2\times 3} = 0$$

$a=3$ donc la dérivée est positive à l'extérieur des racines :

si $x \in \left]-\frac{2}{3};0\right[$, alors $f'(x)<0$ et la fonction est décroissante.

si $x \in \left]-\infty;-\frac{2}{3}\right[\cup \left]0;+\infty\right[$, alors $f'(x)>0$ et la fonction est croissante.



c) $f(x) = \left(\frac{3x^2+5}{x+2}\right)^3$ on pose $u(x) = \frac{3x^2+5}{x+2}$

$$\rightarrow u'(x) = \frac{6x\times(x+2)-\left(3x^2+5\right)\times 1}{(x+2)^2} = \frac{6x^2+12x-3x^2-5}{(x+2)^2} = \frac{3x^2+12x-5}{(x+2)^2}$$

f est dérivable en tant que quotient de polynômes :

$\rightarrow f'(x)=3\left(\dfrac{3x^2+5}{x+2}\right)^2\times\dfrac{3x^2+12x-5}{(x+2)^2}$

$\left(\dfrac{3x^2+5}{x+2}\right)^2\geq 0$ et $(x+2)^2>0$ en tant qu'expression au carré.

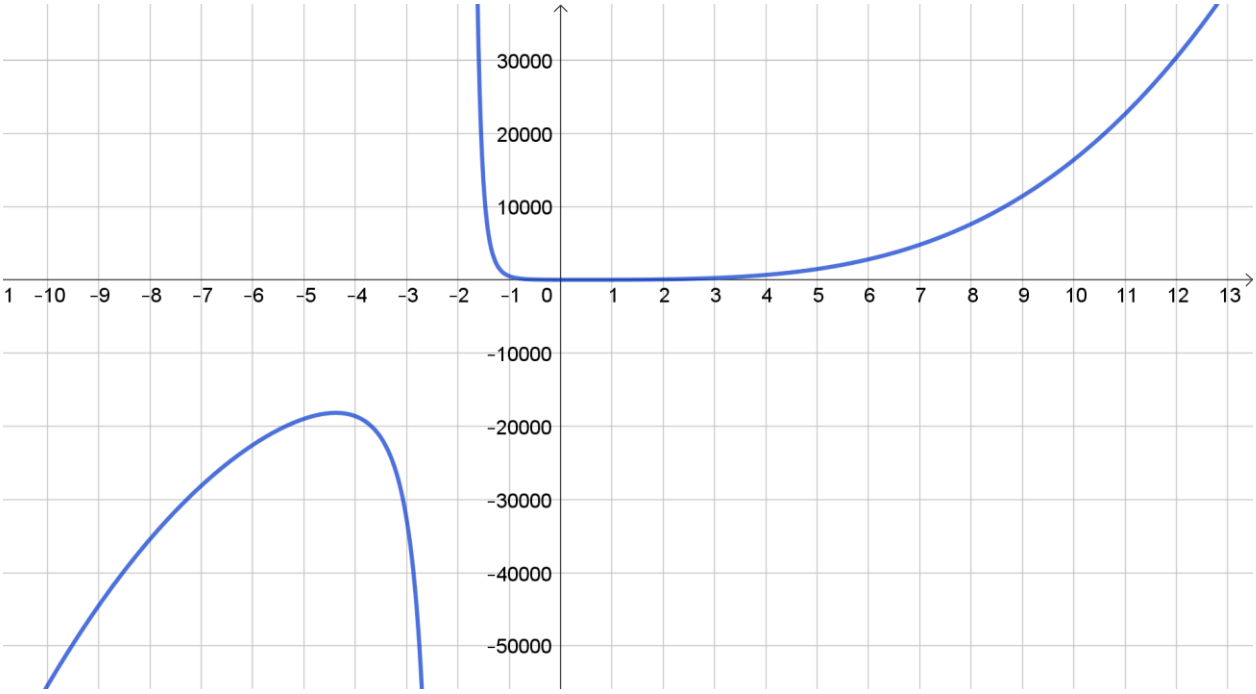
$\Delta=12^2-4\times3\times(-5)=144+60=204$,

$x_1=\dfrac{-12-\sqrt{204}}{2\times3}=\dfrac{-6-\sqrt{51}}{3}$ et $x_2=\dfrac{-12+\sqrt{204}}{2\times3}=\dfrac{-6+\sqrt{51}}{3}$

$a=3$ donc la dérivée est positive à l'extérieur des racines :

si $x\in\left]\dfrac{-6-\sqrt{51}}{3};-2\right[\cup\left]-2;\dfrac{-6+\sqrt{51}}{3}\right[$, alors $f'(x)<0$ et la fonction est décroissante.

si $x\in\left]-\infty;\dfrac{-6-\sqrt{51}}{3}\right[\cup\left]\dfrac{-6+\sqrt{51}}{3};+\infty\right[$, alors $f'(x)>0$ et la fonction est croissante.



d) $f(x)=\dfrac{3x-5}{\sqrt{x^2+2}}$ on pose $u(x)=\sqrt{x^2+2}\rightarrow u'(x)=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+2}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}$

$$\rightarrow f'(x)=\frac{3\times\sqrt{x^2+2}-(3x-5)\times\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}}{\left(\sqrt{x^2+2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{x^2+2}\times\dfrac{\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{x^2+2}}-\dfrac{x(3x-5)}{\sqrt{x^2+2}}}{x^2+2}$$

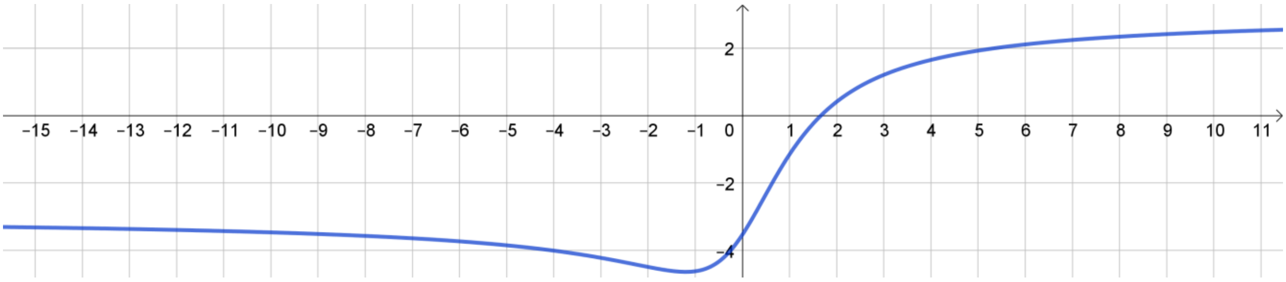
$$=\frac{\dfrac{3(x^2+2)}{\sqrt{x^2+2}}-\dfrac{3x^2-5x}{\sqrt{x^2+2}}}{x^2+2}=\frac{\dfrac{6+5x}{\sqrt{x^2+2}}}{x^2+2}=\frac{6+5x}{\sqrt{x^2+2}\,(x^2+2)^2}$$

Le dénominateur est strictement positif.

$6+5x>0 \iff x>-\dfrac{5}{6}$

Si $x > -\frac{5}{6}$, alors $f'(x) > 0$ et la fonction est croissante.

Si $x < -\frac{5}{6}$, alors $f'(x) < 0$ et la fonction est décroissante.



e) $f(x) = \sqrt{\sqrt{3x+1}}$ on pose $u(x) = \sqrt{3x+1} \rightarrow u'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$

$$\rightarrow f'(x) = \frac{\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}}{2\sqrt{\sqrt{3x+1}}} = \frac{3}{2\sqrt{3x+1} \times 2\sqrt{\sqrt{3x+1}}} = \frac{3}{4\sqrt{3x+1} \times \sqrt{\sqrt{3x+1}}}$$

Cette dérivée est strictement positive sur $\left[-\frac{1}{3}; +\infty\right[$ donc la fonction est croissante.