

Dérivées techniques de fonctions composées

Exercice 3B.1 :

Calculer les dérivées suivantes de la fonction g :

- a) $g(x) = f(x^2)$ avec $f(x) = e^{x^2+4}$
- b) $g(x) = f(1-x)$ avec $f(x) = e^{3x+1}$
- c) $g(x) = f(3x+7)$ avec $f(x) = 5x^3 - 9x + 4$

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. QUET

Exercice 3B.1 :

Calculer les dérivées suivantes de la fonction g :

a) $g(x) = f(x^2)$ avec $f(x) = e^{x^2+4}$

La fonction g se définit comme suit :

$$\begin{array}{c} u \\ x \mapsto x^2 \end{array} \xrightarrow{f} f(x^2) \quad \rightarrow \quad g = f \circ u$$

On pose $u(x) = x^2$ donc : $u'(x) = 2x$ et : $f'(x) = 2x \times e^{x^2+4}$

Ainsi : $g(x) = f(u(x))$ d'où : $g'(x) = u'(x) \times f'(u(x))$

On obtient :

$$g'(x) = 2x \times 2 \times x^2 \times e^{(x^2)^2+4} = 4x^3 \times e^{x^4+4}.$$

b) $g(x) = f(1-x)$ avec $f(x) = e^{3x+1}$

La fonction g se définit comme suit :

$$\begin{array}{c} u \\ x \mapsto 1-x \end{array} \xrightarrow{f} f(1-x)$$

On pose $u(x) = 1-x$ donc : $u'(x) = -1$ et : $f'(x) = 3e^{3x+1}$

Ainsi : $g(x) = f(u(x))$ d'où : $g'(x) = u'(x) \times f'(u(x))$

On obtient :

$$g'(x) = -1 \times 3e^{3(1-x)+1} = -3e^{4-3x}.$$

c) $g(x) = f(3x+7)$ avec $f(x) = 5x^3 - 9x + 4$

La fonction g se définit comme suit :

$$\begin{array}{c} u \\ x \mapsto 3x+7 \end{array} \xrightarrow{f} f(3x+7)$$

On pose $u(x) = 3x+7$ donc : $u'(x) = 3$ et : $f'(x) = 15x^2 - 9$

Ainsi : $g(x) = f(u(x))$ et $g'(x) = u'(x) \times f'(u(x))$

On obtient :

$$\begin{aligned} g'(x) &= 3 \times [15(3x+7)^2 - 9] \\ &= 3 \times [15(9x^2 + 42x + 49) - 9] \\ &= 3(135x^2 + 630x + 726) \end{aligned}$$