Exercices sur la convexité

Exercice 4A.1 :

A l'aide de votre calculatrice, construire la courbe représentative des fonctions ci-dessous sur l'intervalle $[0;2]$ et indiquez si la fonction vous semble convexe, concave ou ni l'un, ni l'autre sur $[0;2]$.

$f(x)=5x^3-8x+2$ $\qquad$ $f(x)=x\sqrt{x}-x^2$

$f(x)=2e^x-3x^2$ $\qquad$ $f(x)=-2x^3+6x^2-6x+2$

Exercice 4A.2 :

On donne trois points *A*, *B* et *C* situés sur la représentation graphique d'une fonction *f*, définie et dérivable sur $[1;5]$ et qui est soit convexe, soit concave.

Placer ces points dans un repère, construire une courbe possible et indiquer si *f* est convexe ou concave.

$A(1;5), B(3;3)$ et $C(5;2)$ $\qquad$ $A(1;-5), B(3;3)$ et $C(5;-3)$

Exercice 4A.3 :

On donne les équations de tangentes en 3 points *A*, *B*, *C* de la courbe représentative d'une fonction *f* définie et dérivable sur $[0;6]$. Les points ont pour abscisse respective 1, 3, 5.

Expliquer pourquoi *f* ne peut être ni convexe, ni concave.

On a : $T_A : y=-x+3$, $\quad T_B : y=5$ $\quad$ et $\quad T_C : y=-x+9$

Exercice 4A.4 :

f est une fonction dérivable et **concave** sur $\mathbb{R}$.

Sa tangente au point d'abscisse -1 a pour équation $T : y=-x+2$.

Les inégalités suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

$f(0)<3$ $\qquad$ $f(2)>0$ $\qquad$ $f(-3)\leq -5$

Exercice 4A.5 :

f est une fonction concave sur $\mathbb{R}$. Indiquer si la fonction *g* est convexe ou concave sur son ensemble de définition.

- $g(x)=-5\times f(x)+3x^2+x$
- $g(x)=7\times f(x)-5e^x$

Exercice 4A.6 :

Pour chaque fonction ci-dessous définie sur $\mathbb{R}$, calculer sa dérivée seconde et déduisez-en les intervalles où *f* est convexe ou concave et les points d'inflexion éventuels.

$f(x)=4x^2-16x+15$ $\qquad$ $f(x)=x^3+3x^2+7x+1$

$f(x)=x^4-12x^3+6x^2+4$ $\qquad$ $f(x)=xe^x+x-1$

Exercice 4A.7 :

f est une fonction dérivable et convexe sur $\mathbb{R}$. La tangente à sa courbe représentative au point d'abscisse 1 a pour équation : $T :\ y=3$.

1. Expliquer pourquoi pour tout réel *x*, $f(x)>0$.
2. Montrer que *f '* est négative sur $]-\infty;1[$ et positive sur $]1;+\infty[$.
3. Donner alors le tableau de variation de *f*.

Exercice 4A.8 :

Une entreprise fabrique un produit liquide et sa production peut varier de 1 à 15 hectolitres par jour.

On suppose que tout le produit fabriqué est vendu.

On note $C(x)$ en milliers d'euros le coût moyen de fabrication d'un hectolitre et $p(x)$ le prix de vente d'un hectolitre pour *x* hectolitres fabriqués.

On suppose que $C(x)=0,5x+\dfrac{8}{x}$ et que $p(x)=-0,8x+13$

1. Démontrer que *C* est une fonction convexe sur $[1;15]$.
2. Déduisez-en l'intervalle dans lequel doit se situer *x* pour que l'entreprise soit bénéficiaire.

<u>Exercice 4A.9 :</u>

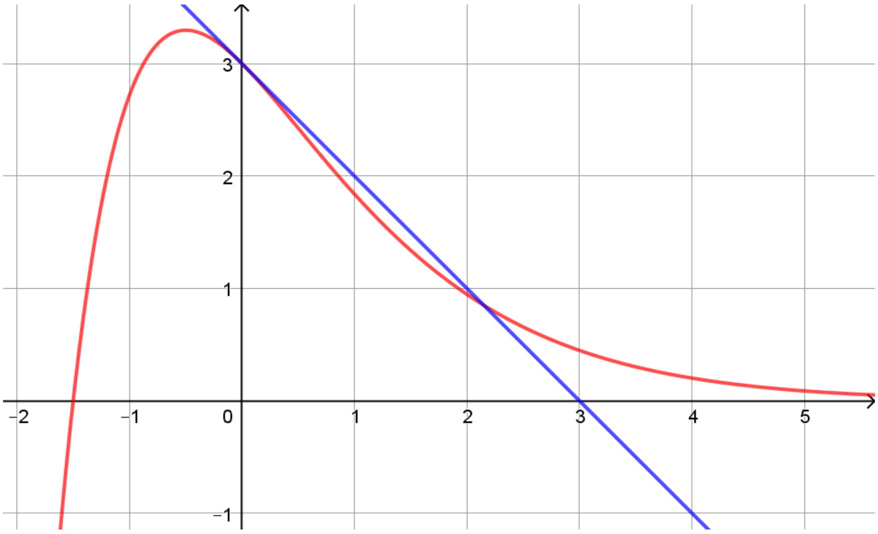
Soit $f(x)=\ln\left(x^2+1\right)$. Etudier alors sa convexité sur $\mathbb{R}$.

Déterminer si la courbe représentative de *f* possède des points d'inflexions, et si oui, donner leurs coordonnées.

<u>Exercice 4A.10 :</u>

La courbe C ci-dessous représente dans un repère orthonormal une fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x)=(ax+b)e^{-x}$



1) A. Déterminer par lecture graphique $f(0)$. → $f(0)=3$

   B. Déterminer par lecture graphique $f'(0)$. → $f'(0)=-1$

   C. Pensez-vous que cette fonction semble convexe sur $[0;6]$?

2) A. Exprimer f' en fonction de *a* et *b*.
   B. A l'aide des résultats des questions précédentes, déterminer les valeurs de *a* et *b* puis de
   C. Calculer alors f''.
   D. Indiquer alors sur quel intervalle de $\mathbb{R}$ *f* est convexe et celui sur lequel elle est concave.

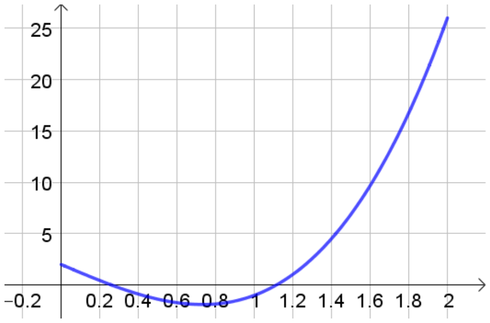
3) Déterminer le point d'inflexion de la courbe et une équation de la tangente en ce point.

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. Quet

Exercice 4A.1 :

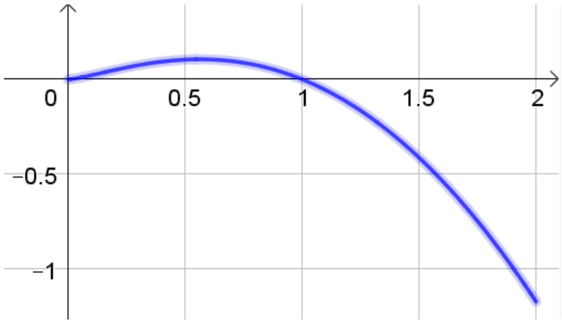
A l'aide de votre calculatrice, construire la courbe représentative des fonctions ci-dessous sur l'intervalle $[0;2]$ *et indiquez si la fonction vous semble convexe, concave ou ni l'un, ni l'autre sur* $[0;2]$.

$f(x)=5x^3-8x+2$



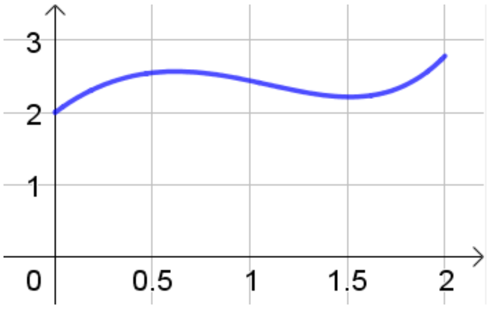
Cette fonction semble convexe

$f(x)=x\sqrt{x}-x^2$



Cette fonction semble concave

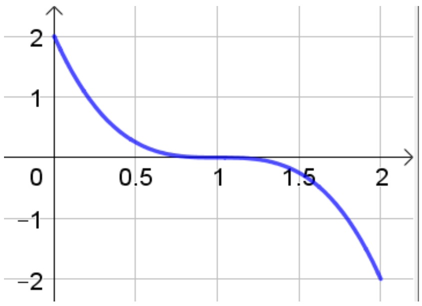
$f(x)=2e^x-3x^2$



Cette fonction semble concave sur $[0;1]$

et convexe sur $[1;2]$

$f(x)=-2x^3+6x^2-6x+2$



Cette fonction semble convexe sur $[0;0,8]$

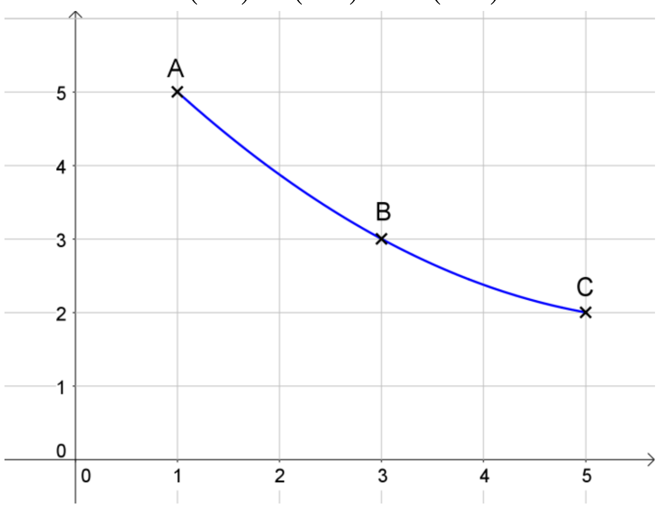
et concave sur $[0,8;2]$

Exercice 4A.2 :

On donne trois points A, B et C situés sur la représentation graphique d'une fonction f, définie et dérivable sur $[1;5]$ *et qui est soit convexe, soit concave.*

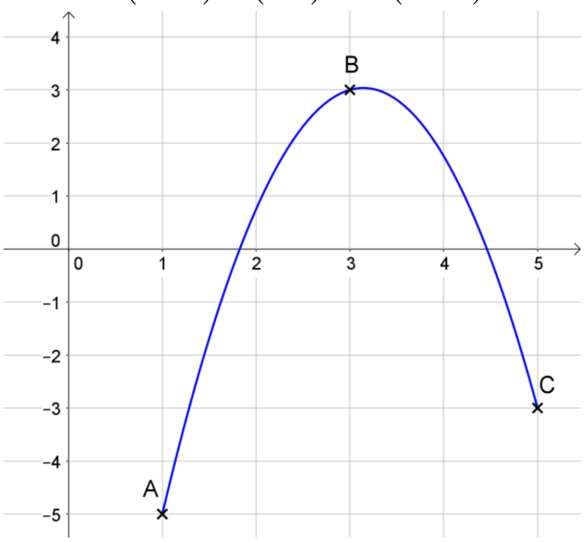
Placer ces points dans un repère, construire une courbe possible et indiquer si f est convexe ou concave.

$A(1;5), B(3;3)$ et $C(5;2)$



Cette fonction est convexe

$A(1;-5), B(3;3)$ et $C(5;-3)$



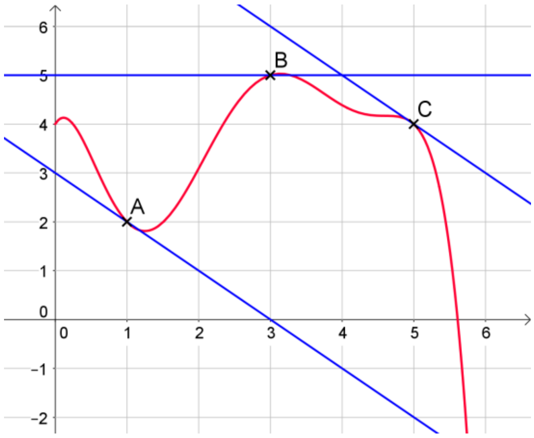
Cette fonction est concave

Exercice 4A.3 :

On donne les équations de tangentes en 3 points A, B, C de la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $[0;6]$. Les points ont pour abscisse respective 1, 3 et 5.

Expliquer pourquoi f ne peut être ni convexe, ni concave.

On a : $T_A : y = -x+3$, $T_B : y = 5$ *et* $T_C : y = -x+9$



L'allure des points A, B et C donne une forme a-priori concave, c'est-à-dire d'une fonction située en dessous de ses tangentes. Mais une fonction concave possède des tangentes dont le coefficient directeur est de plus en plus petit. Or les tangentes T_A et T_C sont parallèles.

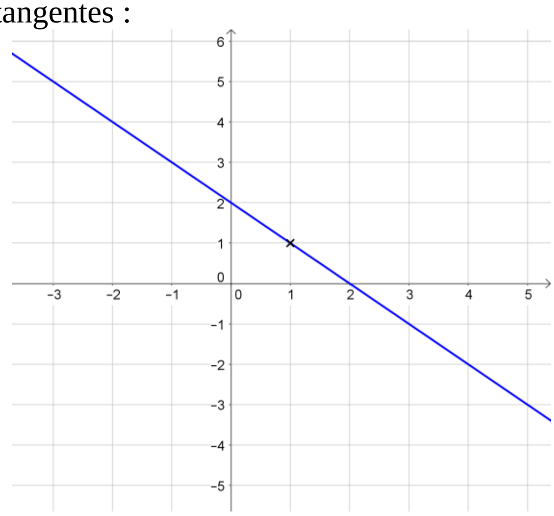
Exercice 4A.4 :

f est une fonction dérivable et **concave** sur $\mathbb{R}$.

Sa tangente au point d'abscisse -1 a pour équation $T : y = -x+2$.

Les inégalités suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

→cette fonction est concave, donc elle se trouve sous toutes ses tangentes :



- $f(0) < 3$ est FAUX car le point de coordonnées $(0;2{,}5)$ serait au-dessus de la tangente.
  →la réponse doit être $f(0) < 2$
- $f(2) > 0$ est FAUX car le point de coordonnées $(2;1)$ serait au-dessus de la tangente.
  →la réponse doit être $f(2) < 0$
- $f(-3) \le -5$ est FAUX car rien n'empêche d'avoir une fonction concave passant par le point de coordonnées $(-3;0)$

Exercice 4A.5 :

f est une fonction **concave** sur $\mathbb{R}$. Indiquer si la fonction g est convexe ou concave sur son ensemble de définition.

- $g(x) = -5\times f(x) + 3x^2 + x$
- $g(x) = 7\times f(x) - 5e^x$

Si une fonction est convexe (resp. concave) sur un intervalle :

Si $k>0$, la fonction $k\times f$ est convexe (resp. concave).

Si $k<0$, la fonction $k\times f$ est concave (resp. convexe).

La somme de deux fonctions concaves est une fonction concave.

- $g(x) = -5\times f(x) + 3x^2 + x$

  La fonction $-5\times f(x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$,

  la fonction carrée $3x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$, la droite $y=x$ est à la fois convexe et concave.

$\rightarrow$ainsi la fonction $g(x)$ est convexe sur $]0;+\infty[$

- $g(x)=7\times f(x)-5e^x$

La fonction $7\times f(x)$ est concave sur $\mathbb{R}$,

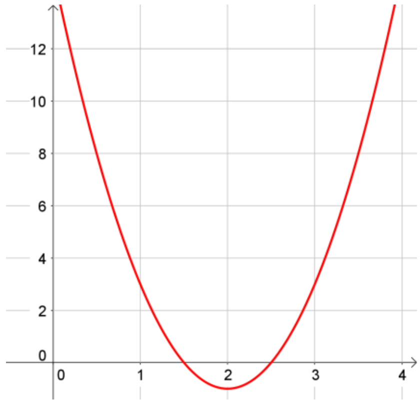
la fonction exponentielle e^x est convexe sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $-5e^x$ est concave sur $\mathbb{R}$

$\rightarrow$ainsi la fonction $g(x)$ est concave sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4A.6 :

Pour chaque fonction ci-dessous définie sur $\mathbb{R}$, calculer sa dérivée seconde et déduisez-en les intervalles où f est convexe ou concave et les points d'inflexion éventuels.

- $f(x)=4x^2-16x+15$



f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynômiale :

$f'(x)=8x-16$

$f''(x)=8$

La dérivée seconde ne s'annule pas,

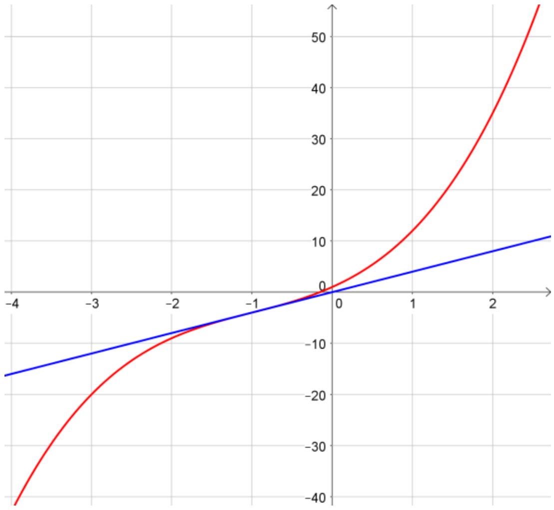
il n'y a pas de point d'inflexion

La dérivée seconde est positive

donc la dérivée est croissante

et la fonction f est convexe.

- $f(x)=x^3+3x^2+7x+1$



f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynômiale

$f'(x)=3x^2+6x+7$

$f''(x)=6x+6=6(x+1)$

$f''(x)>0 \iff 6(x+1)>0 \iff x>-1$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	décroissante		croissante
$f(x)$	concave		convexe

f est concave sur $]-\infty;-1[$ et convexe sur $]-1;+\infty[$

La dérivée seconde s'annule en changeant de signe.

$f(-1)=(-1)^3+3\times(-1)^2+7\times(-1)+1=-1+3-7+1=-4$

$\rightarrow$les coordonnées du point d'inflexion sont $(-1;-4)$

$f'(-1)=3\times(-1)^2+6\times(-1)+7=3-6+7=4$

L'équation de la tangente en ce point est :

$T: y=f'(-1)\times(x-(-1))+f(-1)=4(x+1)-4=4x$

- $f(x)=x^4-12x^3+6x^2+4$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynômiale

$f'(x)=4x^3-36x^2+12x$

$f''(x)=12x^2-72x+12=12\left(x^2-6x+1\right)$

Il faut étudier le signe de ce polynôme du second degré : $\Delta=(-6)^2-4\times1\times1=36-4=32$

$\Delta>0$ donc il y a deux solutions : $x_1=\dfrac{-(-6)-\sqrt{32}}{2}=\dfrac{6-\sqrt{16}\times\sqrt{2}}{2}=\dfrac{6-4\sqrt{2}}{2}=3-2\sqrt{2}$

$$x_2=\dfrac{-(-6)+\sqrt{32}}{2}=\dfrac{6+\sqrt{16}\times\sqrt{2}}{2}=\dfrac{6+4\sqrt{2}}{2}=3+2\sqrt{2}$$

$a>0$ donc la dérivée seconde est strictement positive si $x\in\left]-\infty;3-2\sqrt{2}\right[\cup\left]3+2\sqrt{2};+\infty\right[$

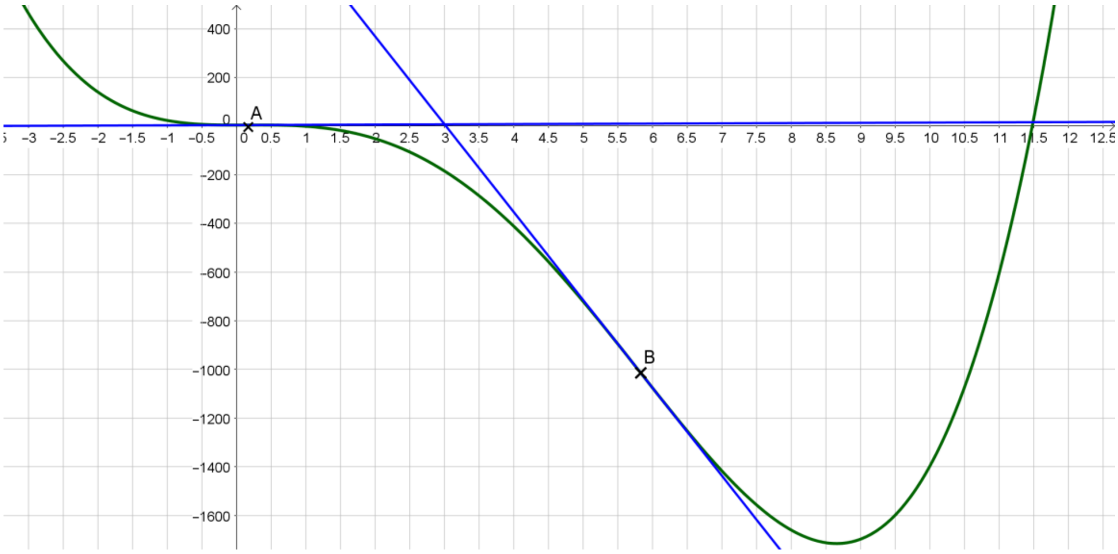
x	$-\infty$	$3-2\sqrt{2}$		$3+2\sqrt{2}$	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	–	0	+
$f'(x)$	croissante		décroissante		croissante
$f(x)$	convexe		concave		convexe

f est concave sur $\left]3-2\sqrt{2};3+2\sqrt{2}\right[$ et convexe sur $\left]-\infty;3-2\sqrt{2}\right[$ et $\left]3+2\sqrt{2};+\infty\right[$

La dérivée seconde s'annule deux fois en changeant de signe : il y a deux points d'inflexion.

$$f\left(3-2\sqrt{2}\right)\simeq-4{,}12 \quad\text{et}\quad f\left(3+2\sqrt{2}\right)\simeq-1014{,}12\ .$$

Les points d'inflexion sont $A(0{,}17;-4{,}12)$ et $B(5{,}83;-1014{,}12)$



- $f(x)=xe^x+x-1$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions polynômiales et exponentielle

$f'(x)=1\times e^x+x\times e^x+1=e^x+xe^x+1$

$f''(x)=e^x+1\times e^x+x\times e^x=e^x+e^x+xe^x=(2+x)e^x$

L'exponentielle est une fonction positive, il faut donc simplement étudier le signe de la parenthèse :

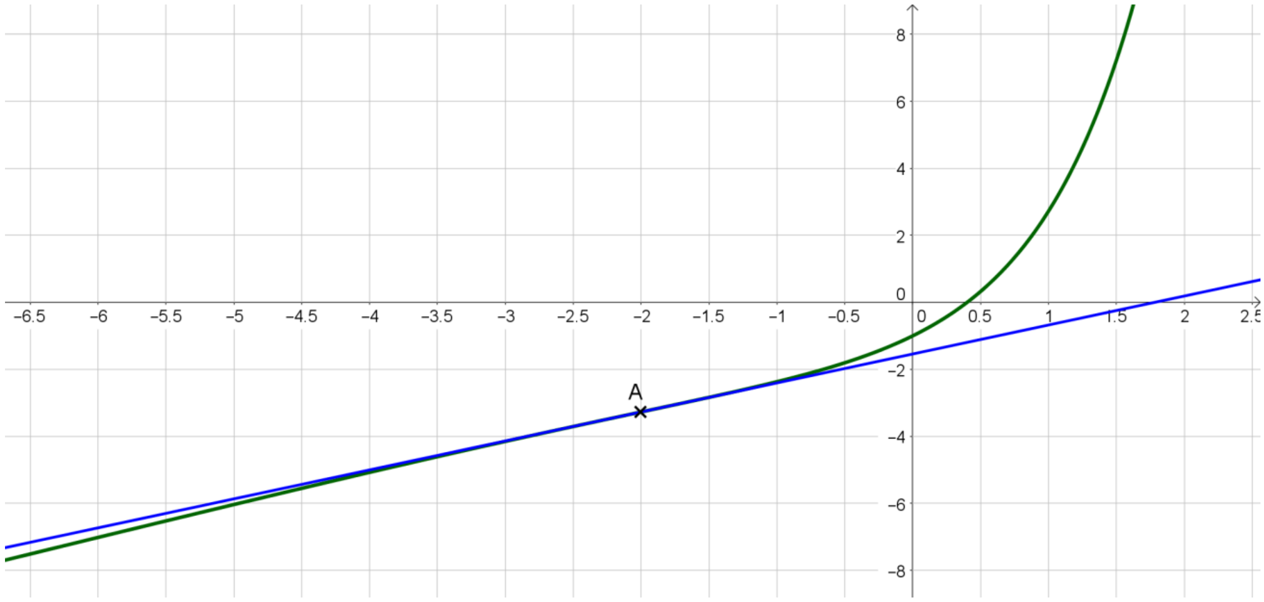
$$f''(x)>0 \iff 2+x>0 \iff x>-2$$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f''(x)$	–	0	+
$f'(x)$	décroissante		croissante
$f(x)$	concave		convexe

f est concave sur $\left]-\infty;-2\right[$ et convexe sur $\left]-2;+\infty\right[$

La dérivée seconde s'annule en changeant de signe.

$f(-2) \simeq -3,27$ → les coordonnées du point d'inflexion sont $(-2;-3,27)$.



Exercice 4A.7 :

f est une fonction dérivable et convexe sur $\mathbb{R}$. La tangente à sa courbe représentative au point d'abscisse 1 a pour équation : $T:\ y=3$.

1. *Expliquer pourquoi pour tout réel x, $f(x)>0$.*

   La fonction est convexe sur $\mathbb{R}$ donc elle est au-dessus de toutes ses tangentes sur $\mathbb{R}$.
   La tangente au point d'abscisse 1 est une droite horizontale d'équation : $T:\ y=3$.
   Donc pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f(x)\geq 3$

2. *Montrer que f ' est négative sur $]-\infty;1[$ et positive sur $]1;+\infty[$.*

   La fonction est convexe donc sa dérivée seconde est positive.
   Ainsi la fonction dérivée f ' est croissante.
   Or on sait que $f'(1)=0$ donc f ' est négative sur $]-\infty;1[$ et positive sur $]1;+\infty[$.

3. *Donner alors le tableau de variation de f.*

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Exercice 4A.8 :

Une entreprise fabrique un produit liquide et sa production peut varier de 1 à 15 hectolitres par jour.
On suppose que tout le produit fabriqué est vendu.
On note $C(x)$ en milliers d'euros le coût moyen de fabrication d'un hectolitre et $p(x)$ le prix de vente d'un hectolitre pour x hectolitres fabriqués.

On suppose que $C(x)=0,5x+\dfrac{8}{x}$ *et que* $p(x)=-0,8x+13$

1. *Démontrer que C est une fonction convexe sur $[1;15]$.*

   C est une fonction dérivable en tant que fonction polynôme et fonction inverse.

   $$C'(x)=0,5-8\times\frac{1}{x^2}=0,5-\frac{8}{x^2}$$

$$C''(x) = -\frac{0\times x^2 - 8\times 2x}{\left(x^2\right)^2} = -\frac{-16x}{x^4} = \frac{16}{x^3}$$

Si $x\in[1;15]$ alors $\frac{16}{x^3} > 0$ ainsi $C''(x) > 0$

Donc si $x\in[1;15]$ alors la dérivée $C'(x)$ est croissante et la fonction $C(x)$ est convexe.

2. *Déduisez-en l'intervalle dans lequel doit se situer x pour que l'entreprise soit bénéficiaire.*

Le bénéfice est donné par $B(x) = p(x) - C(x) = -0,8x + 13 - \left(0,5x + \frac{8}{x}\right) = 13 - 1,3x - \frac{8}{x}$

La fonction affine $p(x)$ représentée par une droite est à la fois convexe et concave sur $[1;15]$.

La fonction $C(x)$ est convexe sur $[1;15]$ donc la fonction $-C(x)$ est concave sur $[1;15]$.

La somme de deux fonctions concaves et une fonction concave donc la fonction $B(x)$ est concave sur $[1;15]$: elle sera positive entre les valeurs où elle s'annule.

$$B(x) = 0 \iff 13 - 1,3x - \frac{8}{x} = 0 \iff \left(13 - 1,3x - \frac{8}{x}\right)\times x = 0\times x \iff 13x - 1,3x^2 - 8 = 0$$

Soit : $-1,3x^2 + 13x - 8 = 0$

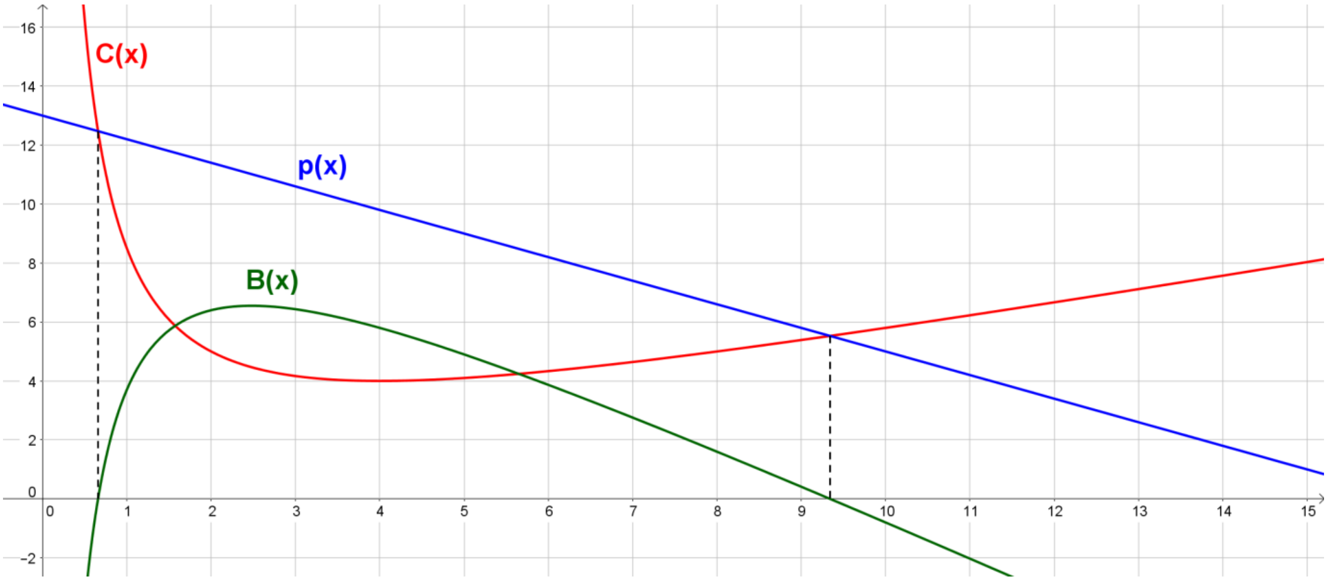
$$\Delta = 13^2 - 4\times(-1,3)\times(-8) = 169 - 41,6 = 127,4$$

$\Delta > 0$ deux solutions : $x_1 = \frac{-13-\sqrt{127,4}}{2\times(-1,3)} = \frac{-13-\sqrt{127,4}}{-2,6} \simeq 9,34$

$$x_2 = \frac{-13+\sqrt{127,4}}{2\times(-1,3)} = \frac{-13+\sqrt{127,4}}{-2,6} \simeq 0,66$$

$a = -1,3$ donc la parabole est orientée vers le bas

Le bénéfice est positif sur l'intervalle $]0,66;9,34[$.



Exercice 4A.9 :

Soit $f(x) = \ln\left(x^2+1\right)$. *Etudier alors sa convexité sur* $\mathbb{R}$.

Déterminer si la courbe représentative de f possède des points d'inflexions, et si oui, donner leurs coordonnées

Pour tout $x\in\mathbb{R}$: $x^2 + 1 > 0$ donc la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

La fonction f est dérivable en tant que fonction logarithme sur $\mathbb{R}$.

On pose $u(x)=x^2+1$ donc $u'(x)=2x$: ainsi : $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$

On en déduit : $f''(x)=\dfrac{2\times(x^2+1)-2x\times 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{2x^2+2-4x^2}{(x^2+1)^2}=\dfrac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}=\dfrac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}=\dfrac{2(1+x)(1-x)}{(x^2+1)^2}$

Le dénominateur est strictement positif donc il faut étudier le signe du numérateur.
Un tableau de signes donne : $f''(x)>0$ si $x\in\left]-1;1\right[$.

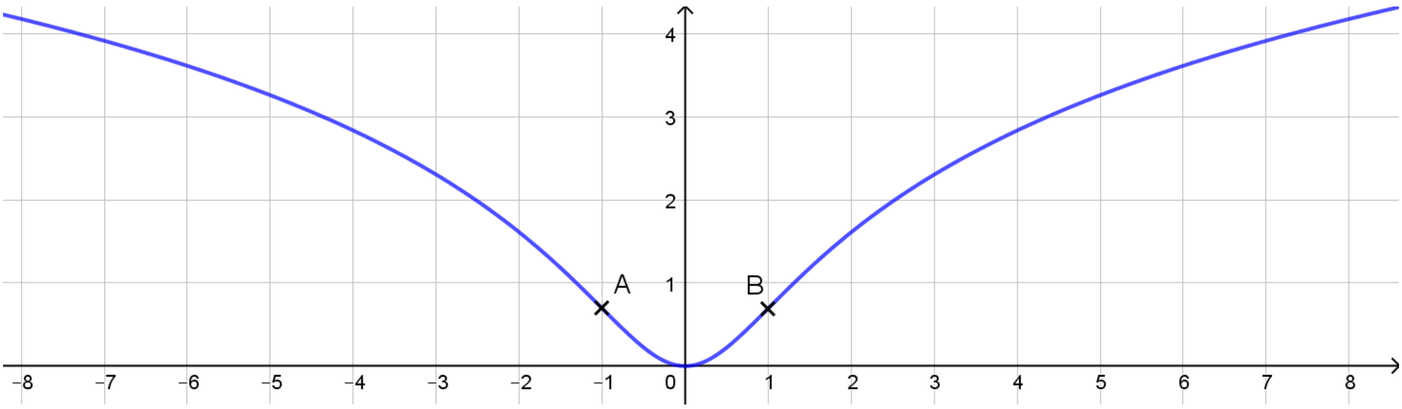
x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f'(x)$	décroissante		croissante		décroissante
$f(x)$	concave		convexe		concave

f est convexe sur $\left]-1;1\right[$ et concave sur $\left]-\infty;-1\right[$ et $\left]1;+\infty\right[$

La dérivée seconde s'annule deux fois en changeant de signe : il y a deux points d'inflexion.

$$f(1)=\ln(1^2+1)=\ln 2\simeq 0,69 \quad \text{et} \quad f(-1)=\ln((-1)^2+1)=\ln 2\simeq 0,69 \ .$$

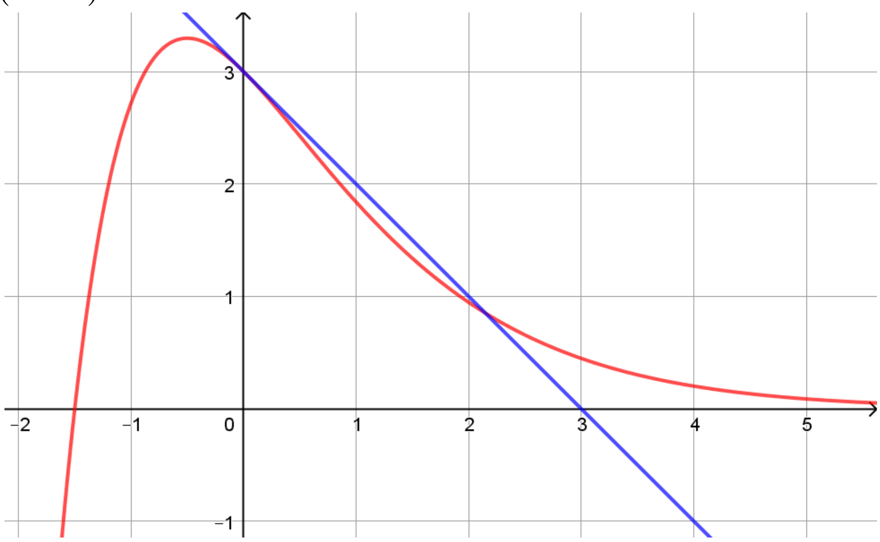
Les points d'inflexion sont $A(-1;0,69)$ et $B(1;0,69)$



Exercice 4A.10 :

La courbe C ci-dessous représente dans un repère orthonormal une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ *par :*

$$f(x)=(ax+b)e^{-x}$$



1) **A.** *Déterminer par lecture graphique* $f(0)$. → $f(0)=3$

B. *Déterminer par lecture graphique* $f'(0)$. → $f'(0)=-1$

C. *Pensez-vous que cette fonction semble convexe sur* $[0;6]$ *?*

Une fonction convexe est au-dessus de toutes ses tangentes.
Or on voit clairement que la fonction est en-dessous de sa tangente au point d'abscisse 0.
Donc cette fonction n'est pas convexe sur $[0;6]$.

2) **A.** *Exprimer f ' en fonction de a et b.*

$$f'(x)=a\times e^{-x}+(ax+b)\times(-e^{-x})=ae^{-x}-axe^{-x}-be^{-x}=(a-ax-b)e^{-x}$$

B. *A l'aide des résultats des questions précédentes, déterminer les valeurs de a et b puis de l'expression de f.*

$$f(0)=(a\times 0+b)e^{-0}=b$$

$$f'(0)=(a-a\times 0-b)e^{-0}=a-b$$

On obtient le système suivant : $\begin{cases} b=3 \\ a-b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=3 \\ a=b-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=3 \\ a=3-1=2 \end{cases}$

Ainsi : $f(x)=(2x+3)e^{-x}$

C. *Calculer alors f ''.*

$$f'(x)=(2-2x-3)e^{-x}=(-2x-1)e^{-x}$$

$$f''(x)=-2\times e^{-x}+(-2x-1)\times(-e^{-x})=-2e^{-x}+2xe^{-x}+e^{-x}=2xe^{-x}-e^{-x}=(2x-1)e^{-x}$$

D. *Indiquer alors sur quel intervalle de* $\mathbb{R}$ *f est convexe et celui sur lequel elle est concave.*

La fonction exponentielle est positive donc :

$$f''(x)>0 \Leftrightarrow 2x-1>0 \Leftrightarrow 2x>1 \Leftrightarrow x>\frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	décroissante		croissante
$f(x)$	concave		convexe

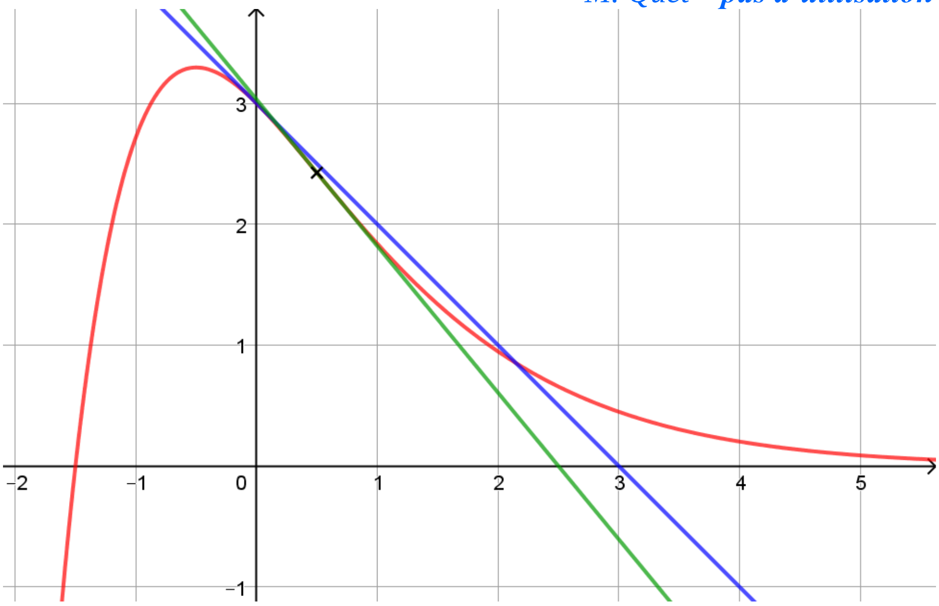
f est concave sur $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$ et convexe sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

3) *Déterminer le point d'inflexion de la courbe et une équation de la tangente en ce point.*

La dérivée seconde s'annule en changeant de signe.

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(2\times\frac{1}{2}+3\right)e^{-\frac{1}{2}}=4e^{-\frac{1}{2}}\simeq 2,43$$

→les coordonnées du point d'inflexion sont $\left(\frac{1}{2};2,43\right)$.


−2
−1
0
1
2
3
4
5
3
2
1
−1