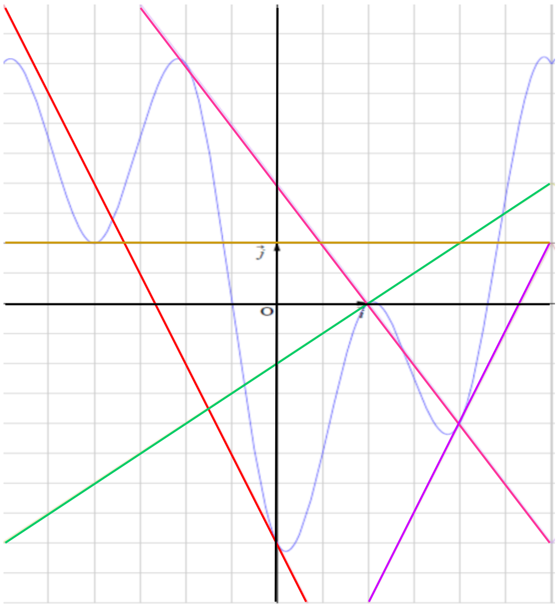
Exercices sur la dérivation et la convexité

Exercice 4B.01 :

La courbe ci-contre représente une fonction *f*.
Toutes les droites tracées sont tangentes à la courbe.
Déterminer à partir de ce graphique :

$f(-2)$ $f(-1)$ $f(0)$ $f(1)$ $f(2)$

$f'(-2)$ $f'(-1)$ $f'(0)$ $f'(1)$ $f'(2)$



Exercice 4B.02

Pour chacune des fonctions ci-dessous, calculer sa dérivée et sa dérivée seconde.

$$f(x) = -\frac{1}{6}x^4 + \frac{5}{2}x^3 + 5x + 10$$

$$g(x) = \frac{-x^2 + 10x - 16}{x^2}$$

$$h(x) = (3 - x)e^x + 1$$

$$r(x) = (3x - 4)e^{-x} + 2$$

Exercice 4B.03

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$

1) a) En utilisant le logiciel GeoGebra, tracer la représentation graphique de *f*.
   b) Créer un point A sur la courbe de *f*.
   c) Tracer la tangente T à la courbe au point A. On pourra, pour cela, utiliser l'outil "Tangentes" et cliquer successivement sur la courbe puis sur le point A.
   d) En déplaçant le point A sur la courbe, vérifier que la courbe est toujours entièrement située au-dessus de la tangente T. On dit alors que la fonction $f : x \mapsto x^2$ est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$.
2) Modifier l'expression de la fonction pour la remplacer par $f(x) = x^3$.

   La fonction f : $x \mapsto x^3$ est-elle une fonction convexe sur $\mathbb{R}$?

Exercice 4B.04

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

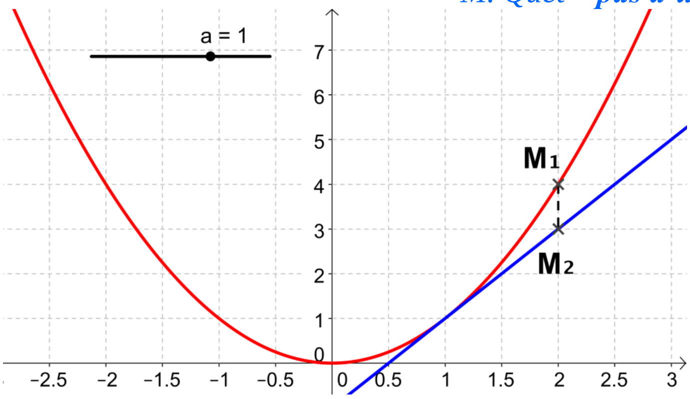
1) En utilisant le logiciel GeoGebra, tracer la représentation graphique de *f*.
2) Créer un point A sur la courbe de *f*.
3) Tracer la tangente T à la courbe au point A. On pourra, pour cela, utiliser l'outil "Tangentes" et cliquer successivement sur la courbe puis sur le point A.
4) Déplacer le point A sur la courbe. Que peut-on en déduire pour la fonction *f* ?

Exercice 4B.05

En utilisant les représentations graphiques obtenues avec une calculatrice ou un ordinateur, que peut-on dire des fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto \ln x$ du point de vue des notions de convexité et de concavité ?

Exercice 4B.06

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et (C) sa courbe représentative (voir dessin ci-dessous). Soit $a \in \mathbb{R}$.



1) Donner l'équation de la tangente T_a à la courbe (C) au point d'abscisse a.
2) Soit $x \in \mathbb{R}$; M_1 le point d'abscisse x sur la courbe (C) et M_2 le point d'abscisse x sur la tangente T_a

   Soit y_1 l'ordonnée de M_1 et y_2 l'ordonnée de M_2.

   Justifier que $y_1 - y_2 = x^2 - 2ax + a^2$.
3) On appelle g la fonction qui à x réel associe $g(x) = x^2 - 2ax + a^2$.

   Calculer $g'(x)$ et étudier son signe. En déduire que g a un minimum que l'on déterminera.

   Justifier que $g(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4) Justifier que (C) est au-dessus de sa tangente T_a.
5) Justifier que f est une fonction convexe.

Exercice 4B.07

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0,05x^4 + 0,1x^3 + 0,1x^2$

1) En utilisant le logiciel GeoGebra, tracer la représentation graphique de f.
2) Créer un point A sur la courbe de f et tracer la tangente T à la courbe au point A. On pourra, pour cela, utiliser l'outil "Tangentes" et cliquer successivement sur la courbe puis sur le point A.
3) En déplaçant le point A sur la courbe, étudier la convexité de f et compléter le tableau suivant :

a	–3	–3	–3	0	1	2	3
$f(a)$							

4) Calculer $f'(x)$ puis $f''(x)$

   Justifier que $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   En déduire que la fonction f' est croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4B.08

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$.

Calculer $f'(x)$ et donner le sens de variation de f'.

Retrouver ainsi que la fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4B.09

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$. On appelle (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

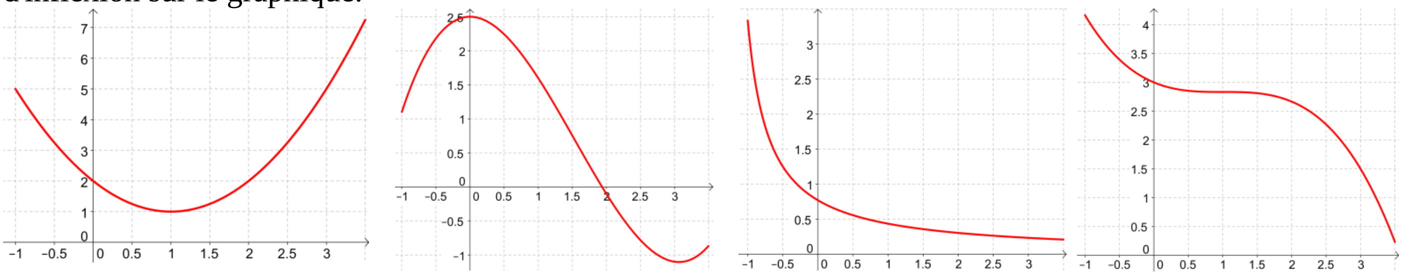
1) Calculer $f'(x)$, puis $f''(x)$.
2) Démontrer que f est concave sur $]-\infty;0]$ et convexe sur $[0;+\infty[$.
3) Justifier que la tangente à (C) en O est l'axe des abscisses. Tracer la courbe (C).

Le point O est un point où la représentation graphique (C) de f traverse sa tangente.

On dit que O est un **point d'inflexion** de la courbe (C).

Exercice 4B.10

Parmi les courbes ci-dessous, indiquer celles qui ont un point d'inflexion et placer approximativement ce point d'inflexion sur le graphique.



Exercice 4B.11

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(3x-4)e^{-x}+2$

1) Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f''(x)=(3x-10)e^{-x}$.
2) Étudier le signe de $f''(x)$ et déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe.
3) Montrer que la courbe représentative (C) de la fonction f possède un point d'inflexion dont on précisera l'abscisse. Vérifier en traçant la courbe avec une calculatrice ou un ordinateur.

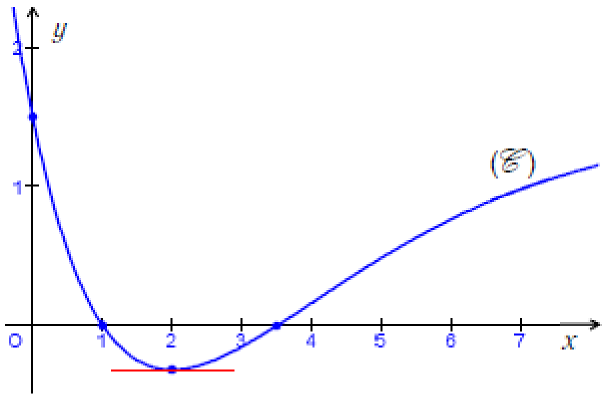
Exercice 4B.12

Indiquer dans chacun des cas le nombre de points d'inflexion de la courbe de la fonction *f*.
Indiquer l'abscisse de chacun des points d'inflexion éventuels.

1) f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-3x+5$
2) f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-2x^2+x+4$
3) f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^4$
4) f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^4-6x^2-2x-5$
5) f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^4+x^3+x^2$
6) f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^x$

Exercice 4B.13

f est une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
La courbe (C) représentative de la fonction f'', dérivée seconde de la fonction *f* est donnée ci-contre.
(C) coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses respectives 1 et 3,5
(C) coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 1,5.
(C) a une tangente parallèle à (Ox) au point d'abscisse 2.
Indiquer, à partir de ce graphique si les propositions ci-dessous sont vraies ou fausses :



1) La courbe (Γ) de f a un point d'inflexion d'abscisse 0
2) La courbe (Γ) de f a un point d'inflexion d'abscisse 1
3) La courbe (Γ) de f a un point d'inflexion d'abscisse 2
4) f est convexe sur l'intervalle [0 ; 2]
5) f est concave sur [1 ; 3,5]

Exercice 4B.14

On considère les droites T ; T_1 et T_2 d'équations respectives $y = x$; $y = x+1$; $y = x-1$.

1) Tracer les trois droites sur un dessin et indiquer leurs positions relatives.
2) Soit C_1 la courbe représentative de la fonction $x \mapsto e^x$.

   Justifier que C_1 a pour tangente en son point d'abscisse 0 la droite T_1.

   En déduire que la courbe C_1 est entièrement située au-dessus de la droite T_1 et tracer C_1 sur le dessin.
3) Soit C_2 la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \ln x$.

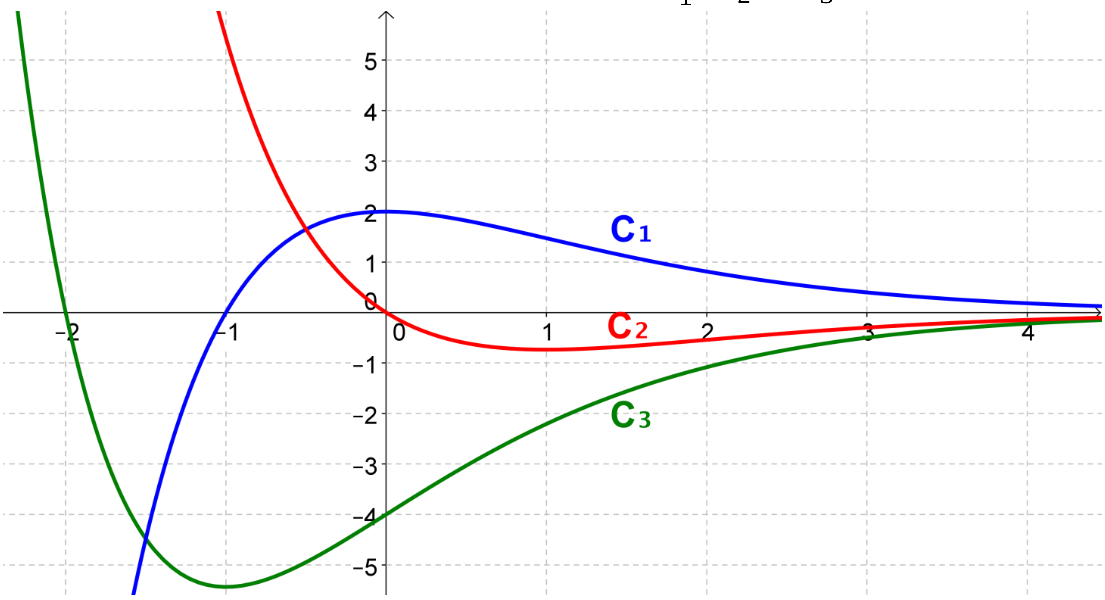
   Justifier que C_2 a pour tangente en son point d'abscisse 1 la droite T_2.

   En déduire que la courbe C_2 est entièrement située au-dessous de la droite T_2 et tracer C_2 sur le dessin.
4) En déduire les positions relatives de C_1 ; C_2 ; T_1; T_2 et T.

Exercice 4B.15

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -2(x+2)e^{-x}$.

1) Calculer $f(-1)$ et en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.
2) Dans le repère orthogonal ci-dessous trois courbes C_1, C_2 et C_3 ont été représentées.

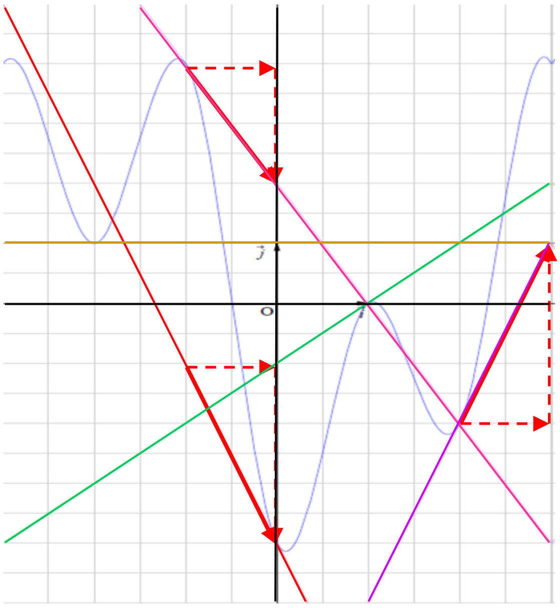


   L'une de ces courbes représente f une autre représente sa dérivée et la troisième représente sa dérivée seconde.

   a) Indiquer, en justifiant, la courbe représentant la fonction *f*, celle représentant f' et celle représentant f''.
   b) Expliquer comment ces représentations graphiques permettent de déterminer la convexité de la fonction *f*.
   c) La courbe de f a-t-elle un point d'inflexion ?
      Si c'est le cas, donner l'abscisse de ce point.

Exercice 4B.01 :

La courbe ci-contre représente une fonction f.
Toutes les droites tracées sont tangentes à la courbe.
Déterminer à partir de ce graphique :



$f(-2)=1$ $\quad f(-1)=4$ $\quad f(0)=-4$

$f'(-2)=0$ $\quad f'(-1)=-2$ $\quad f'(0)=-3$

$f(1)=0$ $\quad f(2)=-2$

$f'(1)=0$ $\quad f'(2)=3$

Exercice 4B.02

Pour chacune des fonctions ci-dessous, calculer sa dérivée et sa dérivée seconde.

$$f(x)=-\frac{1}{6}x^4+\frac{5}{2}x^3+5x+10$$

$$f'(x)=-\frac{1}{6}\times 4x^3+\frac{5}{2}\times 3x^2+5=-\frac{4}{6}x^3+\frac{15}{2}x^2+5=-\frac{2}{3}x^3+\frac{15}{2}x^2+5$$

$$f''(x)=-\frac{2}{3}\times 3x^2+\frac{15}{2}\times 2x=-2x^2+15x$$

$$g(x)=\frac{-x^2+10x-16}{x^2}$$

$$g'(x)=\frac{(-2x+10)\times x^2-\left(-x^2+10x-16\right)\times 2x}{\left(x^2\right)^2}=\frac{-2x^3+10x^2+2x^3-20x^2+32x}{x^4}=\frac{-10x^2+32x}{x^4}$$

$$=\frac{x(-10x+32)}{x^4}=\frac{-10x+32}{x^3}$$

$$g''(x)=\frac{-10\times x^3-(-10x+32)\times 3x^2}{\left(x^3\right)^2}=\frac{-10x^3+30x^3-96x^2}{x^6}=\frac{20x^3-96x^2}{x^6}=\frac{(20x-96)x^2}{x^6}=\frac{20x-96}{x^4}$$

$h(x)=(3-x)e^x+1$ $\quad \rightarrow h'(x)=-1\times e^x+(3-x)\times e^x=\left[-1+(3-x)\right]\times e^x=\left[-1+3-x\right]\times e^x=(2-x)e^x$

$\rightarrow h''(x)=-1\times e^x+(2-x)\times e^x=\left[-1+(2-x)\right]\times e^x=\left[-1+2-x\right]\times e^x=(1-x)e^x$

$$r(x)=(3x-4)e^{-x}+2$$

$$r'(x)=3\times e^{-x}+(3x-4)\times\left(-e^{-x}\right)=3\times e^{-x}+(-3x+4)\times e^{-x}=(3-3x+4)e^{-x}=(7-3x)e^{-x}$$

$$r'(x)=-3\times e^{-x}+(7-3x)\times\left(-e^{-x}\right)=-3\times e^{-x}+(-7+3x)\times e^{-x}=(-3-7+3x)e^{-x}=(-10+3x)e^{-x}$$

Exercice 4B.03

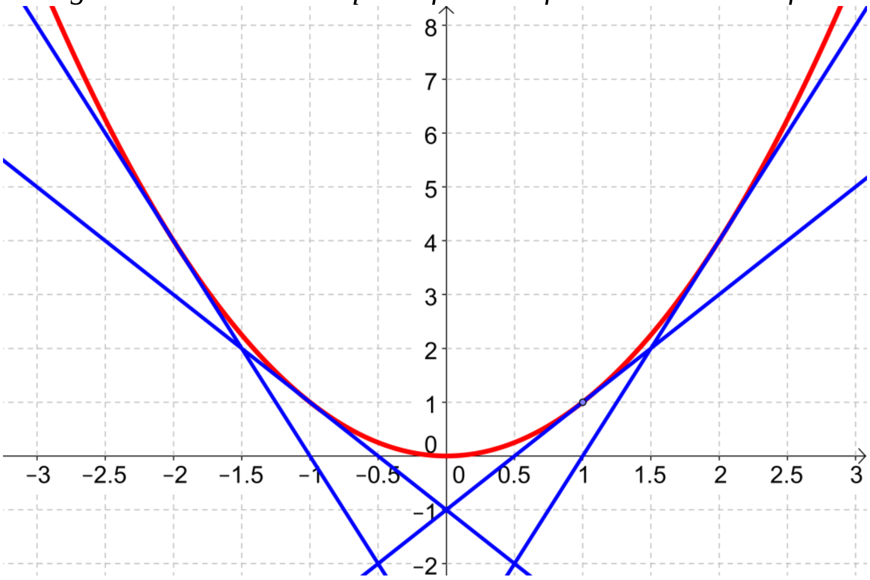
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ *par* $f(x)=x^2$

1) a) *En utilisant le logiciel GeoGebra, tracer la représentation graphique de f.*

b) *Créer un point A sur la courbe de f.*

c) *Tracer la tangente T à la courbe au point A. On pourra, pour cela, utiliser l'outil "Tangentes" et cliquer successivement sur la courbe puis sur le point A.*

d) *En déplaçant le point A sur la courbe, vérifier que la courbe est toujours entièrement située au-dessus de la tangente T. On dit alors que la fonction* $f:\ x \mapsto x^2$ *est une fonction convexe sur* $\mathbb{R}$.

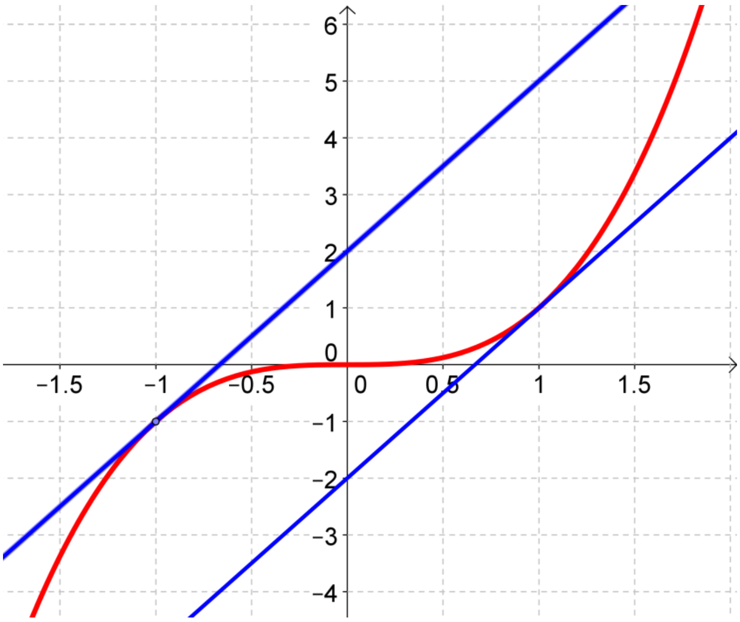


La courbe représentant la fonction carrée est toujours **au-dessus** de ses tangentes

→ la fonction $f:\ x \mapsto x^2$ est une fonction **convexe** sur $\mathbb{R}$.

2) *Modifier l'expression de la fonction pour la remplacer par* $f(x) = x^3$.

La fonction $f:\ x \mapsto x^3$ est-elle une fonction convexe sur $\mathbb{R}$?



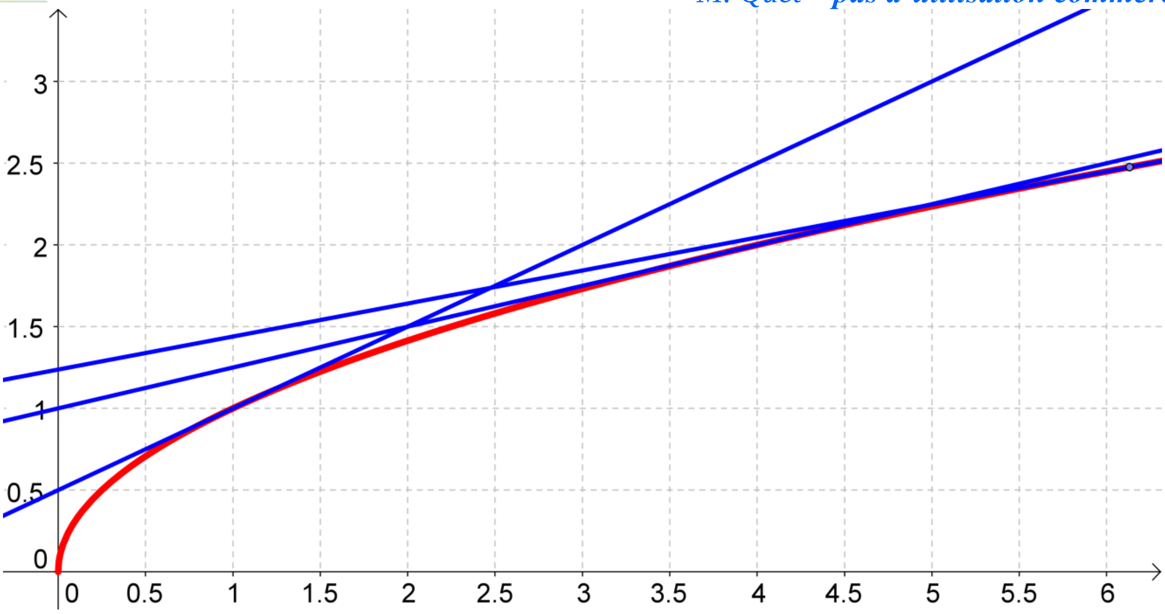
La courbe représentant la fonction cube n'est pas toujours au-dessus de ses tangentes

→ la fonction $f:\ x \mapsto x^3$ est une fonction convexe sur $[0;+\infty[$ et concave sur $]-\infty;0]$.

Exercice 4B.04

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ *par* $f(x) = \sqrt{x}$.

1) *En utilisant le logiciel GeoGebra, tracer la représentation graphique de f.*
2) *Créer un point A sur la courbe de f.*
3) *Tracer la tangente T à la courbe au point A. On pourra, pour cela, utiliser l'outil "Tangentes" et cliquer successivement sur la courbe puis sur le point A.*
4) *Déplacer le point A sur la courbe. Que peut-on en déduire pour la fonction f ?*

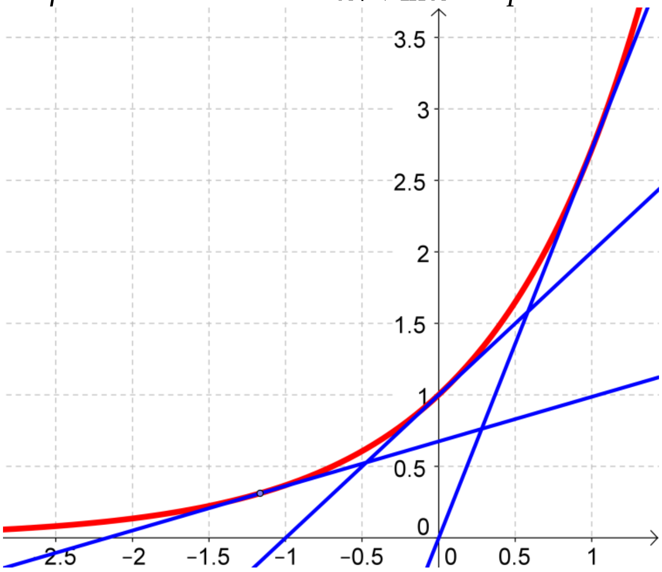


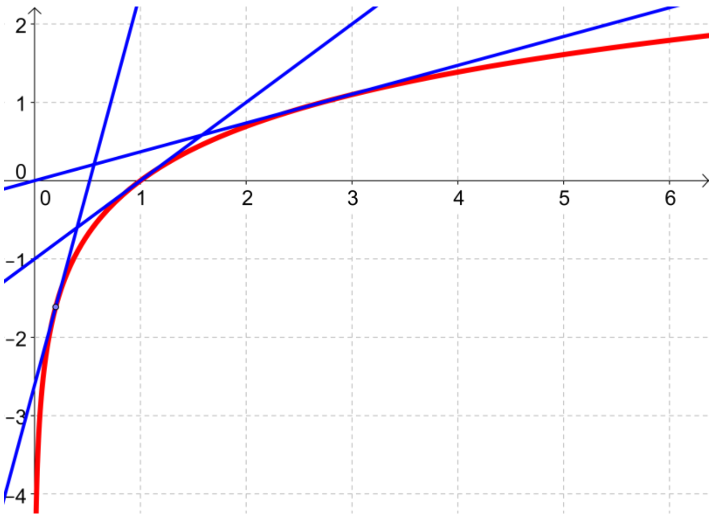
La courbe représentant la fonction racine carrée est toujours **au-dessous** de ses tangentes

→ la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est une fonction **concave** sur $[0;+\infty[$.

Exercice 4B.05

En utilisant les représentations graphiques obtenues avec une calculatrice ou un ordinateur, que peut-on dire des fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto \ln x$ du point de vue des notions de convexité et de concavité ?





La courbe représentant la fonction exponentielle est toujours **au-dessus** de ses tangentes

→ la fonction $f : x \mapsto e^x$ est une fonction **convexe** sur $\mathbb{R}$.

La courbe représentant la fonction logarithme est toujours **au-dessous** de ses tangentes

→ la fonction $f : x \mapsto \ln x$ est une fonction **concave** sur $]0;+\infty[$.

Exercice 4B.06

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et (C) sa courbe représentative (voir dessin ci-contre). Soit $a \in \mathbb{R}$.

1) *Donner l'équation de la tangente T_a à la courbe (C) au point d'abscisse a.*

$$T_a : y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

$$f'(x) = 2x \quad \text{donc} \quad f'(a) = 2a$$

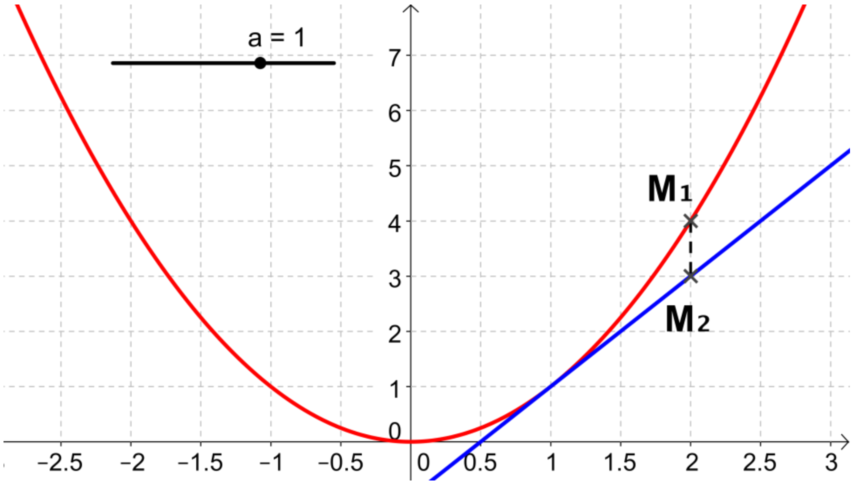
$$f(a) = a^2$$

Ainsi : $T_a : y = 2a(x-a)+a^2 = 2ax-2a^2+a^2 = 2ax-a^2$

2) *Soit $x \in \mathbb{R}$; M_1 le point d'abscisse x sur la courbe (C) et M_2 le point d'abscisse x sur la tangente T_a*

Soit y_1 l'ordonnée de M_1 et y_2 l'ordonnée de M_2.

Justifier que $y_1 - y_2 = x^2 - 2ax + a^2$.



$M_1(x_1 ; y_1)$ a pour coordonnées : $M_1(x ; x^2)$

$M_2(x_2 ; y_2)$ a pour coordonnées : $M_2(x ; 2ax-a^2)$

Ainsi : $y_1 - y_2 = x^2 - (2ax-a^2) = x^2 - 2ax + a^2$

3) *On appelle g la fonction qui à x réel associe $g(x) = x^2 - 2ax + a^2$.*

Calculer $g'(x)$ et étudier son signe. En déduire que g a un minimum que l'on déterminera.

Justifier que $g(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $g'(x) = 2x - 2a = 2(x-a)$ car a est une constante

$g'(x) > 0$

$x - a > 0$

$x > a$

Si $x < a$: $g'(x) < 0$ et la fonction g est décroissante

Si $x > a$: $g'(x) > 0$ et la fonction g est croissante

La fonction g admet donc un minimum en a égal à

$g(a) = a^2 - 2a \times a + a^2 = 0$

Ainsi $g(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4) *Justifier que (C) est au-dessus de sa tangente T_a.*

L'écart entre la courbe (C) et sa tangente T_a est donné par la distance M_1M_2 soit $y_1 - y_2$

$y_1 - y_2 \geq 0$ donc M_1 est toujours au-dessus de M_2 et (C) est au-dessus de sa tangente T_a.

5) *Justifier que f est une fonction convexe.*

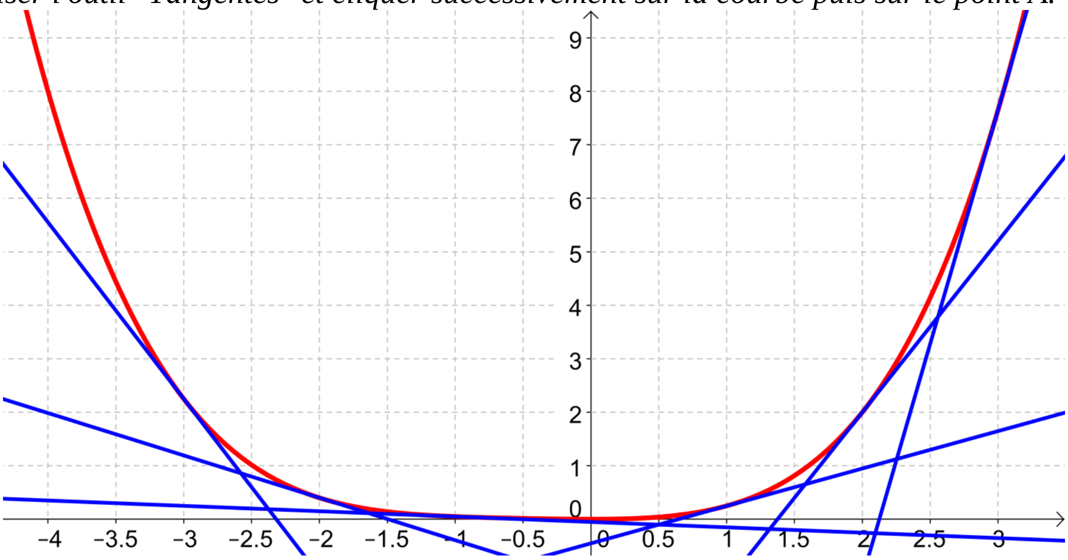
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, (C) est au-dessus de sa tangente T_a :

→ceci signifie que g est une fonction convexe.

Exercice 4B.07

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ *par* $f(x)=0,05x^4+0,1x^3+0,1x^2$

1) *En utilisant le logiciel GeoGebra, tracer la représentation graphique de f.*
2) *Créer un point A sur la courbe de f et tracer la tangente T à la courbe au point A. On pourra, pour cela, utiliser l'outil "Tangentes" et cliquer successivement sur la courbe puis sur le point A.*



3) *En déplaçant le point A sur la courbe, étudier la convexité de f et compléter le tableau suivant :*
La courbe semble au-dessus de chacune de ses tangentes, la fonction *f* semble convexe sur $\mathbb{R}$.

a	-3	-3	-3	0	1	2	3
$f'(a)$	$-8,7$	$-3,2$	$-0,7$	0	0,7	3,2	8,7

4) *Calculer* $f'(x)$ *puis* $f''(x)$

Justifier que $f''(x)\geq 0$ *pour tout* $x\in\mathbb{R}$.

En déduire que la fonction f' *est croissante sur* $\mathbb{R}$.

La fonction *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale

Pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=0,05\times 4x^3+0,1\times 3x^2+0,1\times 2x=0,2x^3+0,3x^2+0,2x$

Pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f''(x)=0,2\times 3x^2+0,3\times 2x+0,2=0,6x^2+0,6x+0,2=0,2\left(3x^2+3x+1\right)$

$\Delta=3^2-4\times 3\times 1=9-12=-3$

$\Delta<0$: il n'y pas de solution donc le polynôme est du signe de *a* :

pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f''(x)>0$

f'' étant la dérivée de f' , on conclue que la fonction f' est croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4B.08

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ *par* $f(x)=e^x$.

Calculer $f'(x)$ *et donner le sens de variation de* f'.

Retrouver ainsi que la fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$.

La fonction *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction exponentielle.

Pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=e^x$

→la fonction exponentielle étant croissante, la dérivée f' est croissante et la fonction *f* est convexe.

Exercice 4B.09

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ *par* $f(x)=x^3$. *On appelle* (C) *la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.*

1) *Calculer* $f'(x)$, *puis* $f''(x)$.

La fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que fonction polynômiale.

Pour tout $x\in]0;+\infty[\ :\ f'(x)=3x^2$

La fonction f' est dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que fonction polynômiale.

Pour tout $x\in]0;+\infty[\ :\ f''(x)=3\times 2x=6x$

2) *Démontrer que f est concave sur* $]-\infty;0]$ *et convexe sur* $[0;+\infty[$.

Si $x\in]-\infty;0]\ :\ f''(x)<0$ et f est concave sur $]-\infty;0]$.

Si $x\in[0;+\infty[\ :\ f''(x)>0$ et f est convexe sur $[0;+\infty[$.

3) *Justifier que la tangente à* (C) *en O est l'axe des abscisses. Tracer la courbe* (C).

Le point O est un point où la représentation graphique (C) de f traverse sa tangente.

On dit que O est un **point d'inflexion** de la courbe (C).

→équation de la tangente à (C) en O : $T_O : y=f'(0)(x-0)+f(0)$

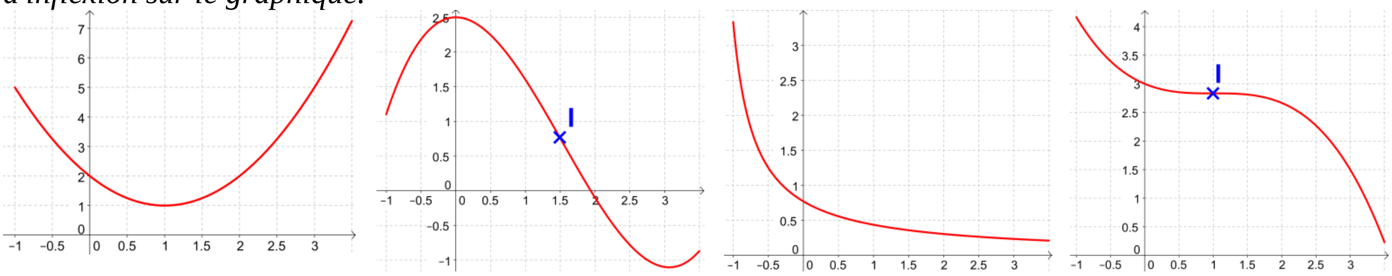
$f'(0)=3\times 0^2=0$ et $f(0)=0^3=0$

$T_O : y=0\times(x-0)+0=0$ → la tangente à (C) en O est l'axe des abscisses.

La courbe admet une tangente horizontale en $O(0;0)$ qui sépare les deux parties concave et convexe : ce point st appelé **point d'inflexion** de la courbe (C).

Exercice 4B.10

Parmi les courbes ci-dessous, indiquer celles qui ont un point d'inflexion et placer approximativement ce point d'inflexion sur le graphique.



La deuxième courbe, d'abord concave, devient convexe : elle possède un point d'inflexion.
La deuxième courbe, d'abord convexe, devient concave: elle possède un point d'inflexion.

Exercice 4B.11

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ *par* $f(x)=(3x-4)e^{-x}+2$

1) *Calculer* $f'(x)$ *et vérifier que* $f''(x)=(3x-10)e^{-x}$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonction polynômiale et exponentielle.

Pour tout $x\in]0;+\infty[\ :\ f'(x)=3\times e^{-x}+(3x-4)\times(-e^{-x})=[3-(3x-4)]e^{-x}=(7-3x)e^{-x}$

La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonction polynômiale et exponentielle.

Pour tout $x\in]0;+\infty[\ :\ f''(x)=-3\times e^{-x}+(7-3x)\times(-e^{-x})=[-3-(7-3x)]e^{-x}=(3x-10)e^{-x}$

2) *Étudier le signe de* $f''(x)$ *et déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe.*

L'exponentielle est une fonction strictement positive, donc :

$f''(x)>0$
$3x-10>0$
$3x>10$
$x>\dfrac{10}{3}$

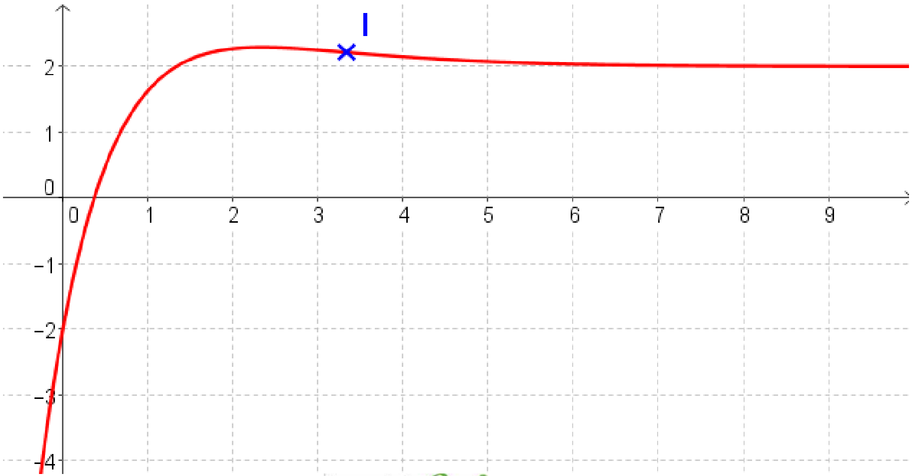
Donc si $x\in\left]\dfrac{10}{3};+\infty\right[$: $f''(x)>0$ et la fonction f est convexe.

si $x\in\left]-\infty;\dfrac{10}{3}\right[$: $f''(x)<0$ et la fonction f est concave.

3) *Montrer que la courbe représentative (C) de la fonction f possède un point d'inflexion dont on précisera l'abscisse. Vérifier en traçant la courbe avec une calculatrice ou un ordinateur.*

Si la dérivée seconde f'' s'annule en changeant de signe en a, alors le point A d'abscisse a de la courbe de f est un point d'inflexion.

On constate ici que le point d'abscisse $\dfrac{10}{3}$ est un point d'inflexion de la courbe représentative (C).



Exercice 4B.12

Indiquer dans chacun des cas le nombre de points d'inflexion de la courbe de la fonction f.
Indiquer l'abscisse de chacun des points d'inflexion éventuels.

1) f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-3x+5$

$f'(x)=2x-3$ et $f''(x)=2$

La dérivée seconde ne s'annule jamais, il n'y a aucun point d'inflexion

2) f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-2x^2+x+4$

$f'(x)=3x^2-2\times 2x=3x^2-4x$

$f''(x)=3\times 2x-4=6x-4$

$f''(x)>0 \Leftrightarrow 6x-4>0 \Leftrightarrow 6x>4 \Leftrightarrow x>\dfrac{4}{6} \Leftrightarrow x>\dfrac{2}{3}$

Si $x\in\left[\dfrac{2}{3};+\infty\right[$: $f''(x)\geq 0$

Si $x\in\left[-\infty;\dfrac{2}{3}\right[$: $f''(x)\leq 0$

Le point d'abscisse $\dfrac{2}{3}$ est un point d'inflexion de la courbe représentative de f.

3) f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^4$

$f'(x) = 4x^3$ et $f''(x) = 4\times 3x^2 = 12x^2$

$f''(0) = 0$ mais pour tout réel x : $f''(x) \geq 0$

La dérivée seconde ne s'annule pas en changeant de signe, il n'y a aucun point d'inflexion.

4) f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 6x^2 - 2x - 5$

$f'(x) = 4x^3 - 6\times 2x - 2 = 4x^3 - 12x - 2$

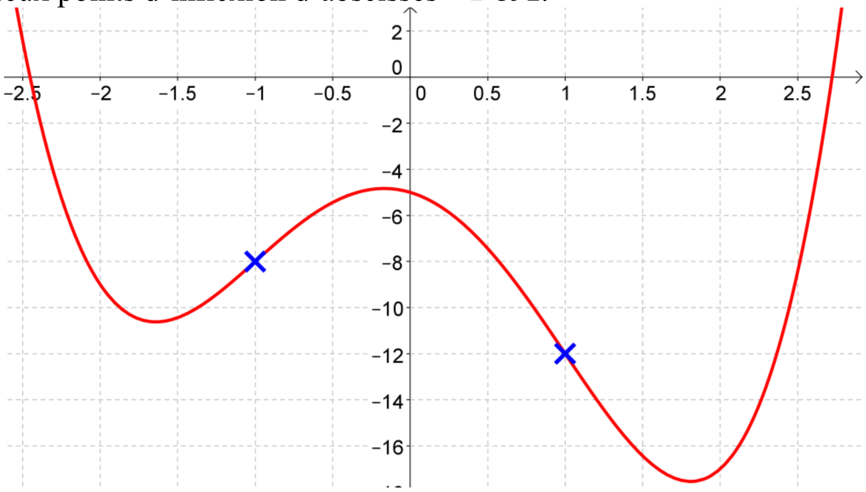
$f''(x) = 4\times 3x^2 - 12 = 12\times x^2 - 12\times 1 = 12\left(x^2 - 1\right) = 12(x+1)(x-1)$

Une étude rapide donne le tableau de signe suivant pour cette dérivée seconde :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

La dérivée seconde s'annule deux fois en changeant de signe

→ il y a deux points d'inflexion d'abscisses -1 et 1.



5) f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 + x^3 + x^2$

$f'(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x$

$f''(x) = 4\times 3x^2 + 3\times 2x + 2 = 12x^2 + 6x + 2 = 2\left(6x^2 + 3x + 1\right)$

$\Delta = 3^2 - 4\times 6\times 1 = 9 - 24 = -15$

$\Delta < 0$: il n'y pas de solution donc le polynôme est du signe de a :

pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f''(x) > 0$

La dérivée seconde ne s'annule jamais, il n'y a aucun point d'inflexion

6) f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$

$f'(x) = e^x$ et $f''(x) = e^x$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f''(x) > 0$

La dérivée seconde ne s'annule jamais, il n'y a aucun point d'inflexion

7) f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 2x^2 + \ln x - 1$

$f'(x) = 2\times 2x + \frac{1}{x} = 4x + \frac{1}{x}$

$f''(x) = 4 - \frac{1}{x^2} = \frac{4x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{4x^2 - 1}{x^2} = \frac{(2x)^2 - 1^2}{x^2} = \frac{(2x+1)(2x-1)}{x^2}$

Si $x \in]0;+\infty[$, alors $2x + 1 > 0$

$2x - 1 > 0$

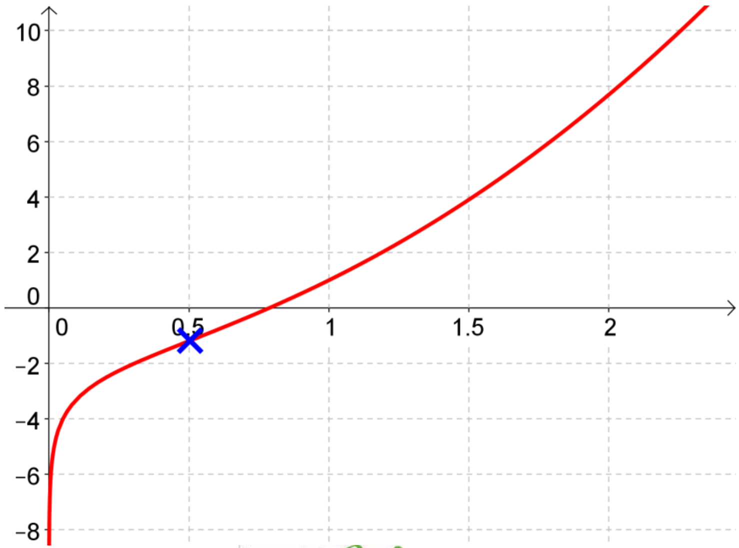
$2x > 1$

$x > \frac{1}{2}$

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	

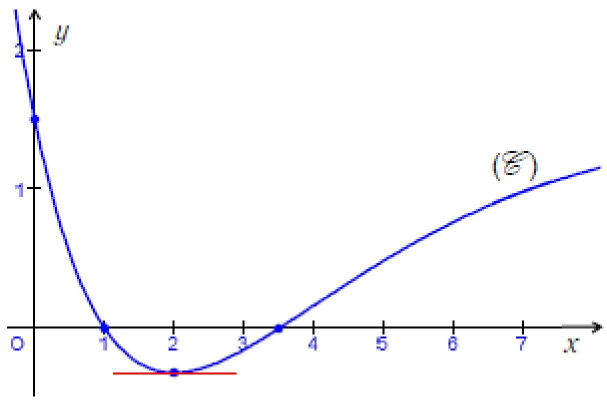
La dérivée seconde s'annule une fois en changeant de signe

→ il y a un point d'inflexion d'abscisse $\frac{1}{2}$.



Exercice 4B.13

f est une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
La courbe (C) représentative de la fonction f'', dérivée seconde de la fonction f est donnée ci-contre.
(C) coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses respectives 1 et 3,5
(C) coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 1,5.
(C) a une tangente parallèle à (Ox) au point d'abscisse 2.



→D'après le graphique : Pour tout $x \in]-\infty;1] \cup [3,5;+\infty[$: $f''(x) \geq 0$ et f est convexe

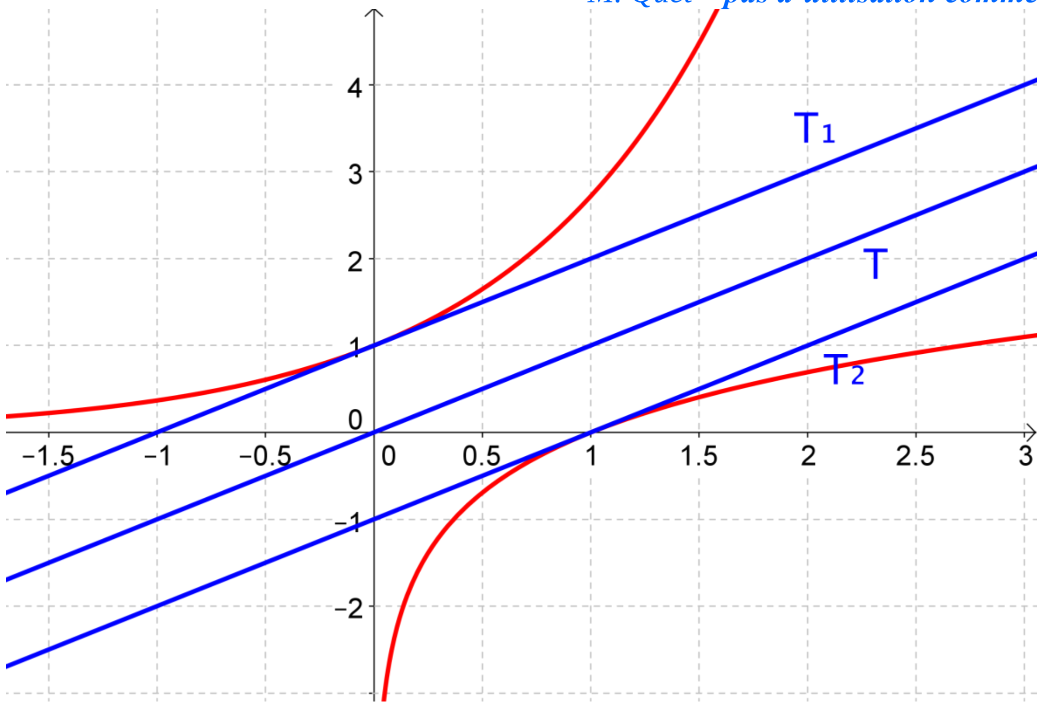
Pour tout $x \in [1;3,5]$: $f''(x) \leq 0$ et f est concave

1) La courbe (Γ) de f a un point d'inflexion d'abscisse 0 →FAUX : $f''(0) = 1,5$ donc $f''(0) \neq 0$
2) La courbe (Γ) de f a un point d'inflexion d'abscisse 1 →VRAI : $f''(1) = 0$ avec chang. de signe
3) La courbe (Γ) de f a un point d'inflexion d'abscisse 2 →FAUX : $f''(2) \neq 0$
4) f est convexe sur l'intervalle [0 ; 2] →FAUX : f est concave sur $[1;3,5]$
5) f est concave sur [1 ; 3,5] →VRAI : pour tout $x \in [1;3,5]$: $f''(x) \leq 0$

Exercice 4B.14

On considère les droites T ; T_1 et T_2 d'équations respectives $y = x$; $y = x+1$; $y = x-1$.

1) *Tracer les trois droites sur un dessin et indiquer leurs positions relatives.*



T_2 est en dessous de T qui est en dessous de T_1.

2) *Soit C_1 la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto e^x$.*

Justifier que C_1 a pour tangente en son point d'abscisse 0 la droite T_1.

En déduire que la courbe C_1 est entièrement située au-dessus de la droite T_1 et tracer C_1 sur le dessin.

→équation de la tangente à C_1 au point d'abscisse 0 : $T_0 : y = f'(0)(x-0)+f(0)$

$f'(0)=e^0=1$ et $f(0)=e^0=1$

$T_0 : y = 1\times(x-0)+1 = x+1$ →on reconnait la droite T_1.

La fonction exponentielle est convexe donc elle est au-dessus de toutes ses tangentes.

3) *Soit C_2 la courbe représentative de la fonction $g : x \mapsto \ln x$.*

Justifier que C_2 a pour tangente en son point d'abscisse 1 la droite T_2.

En déduire que la courbe C_2 est entièrement située au-dessous de la droite T_2 et tracer C_2 sur le dessin.

→équation de la tangente à C_2 au point d'abscisse 1 : $T_1 : y = g'(1)(x-1)+g(1)$

$g'(1)=\frac{1}{1}=1$ et $g(1)=\ln 1=0$

$T_1 : y = 1\times(x-1)+0 = x-1$ →on reconnait la droite T_2.

La fonction logarithme est concave donc elle est au-dessous de toutes ses tangentes.

4) *En déduire les positions relatives de C_1 ; C_2 ; T_1; T_2 et T.*

C_2 est en dessous de T_2 qui est en dessous de T qui est en dessous de T_1 qui est en dessous de C_1.

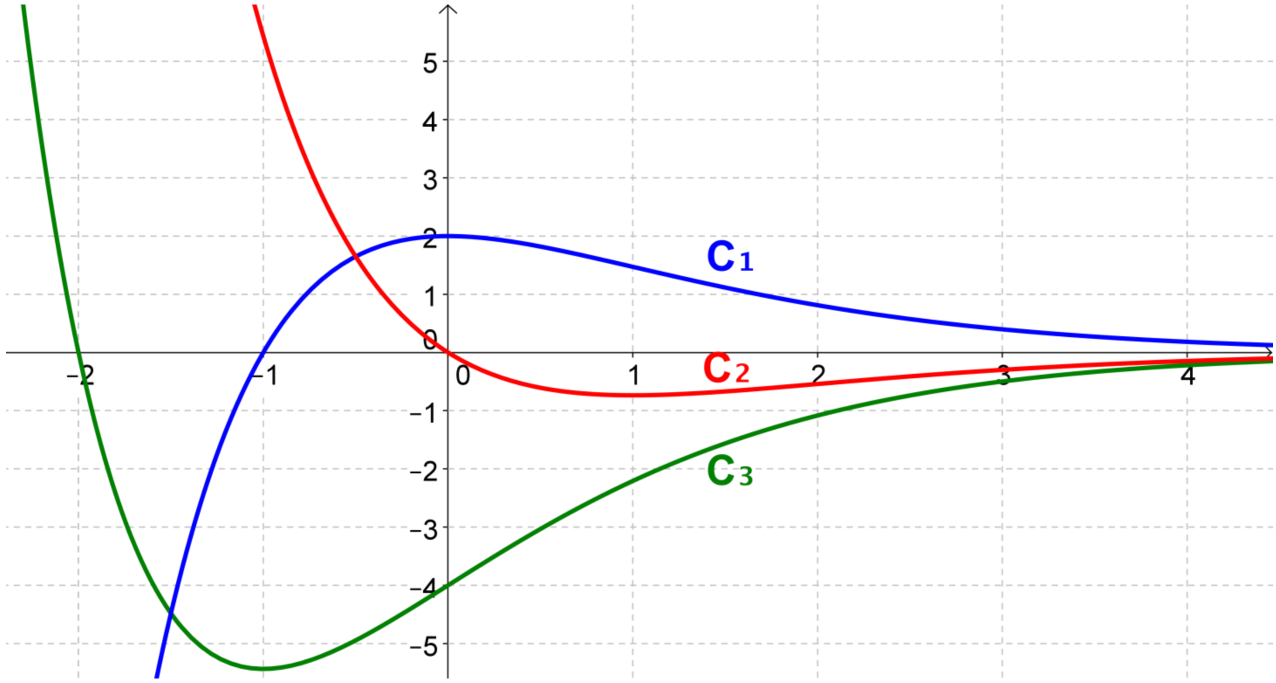
Exercice 4B.15

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=-2(x+2)e^{-x}$.

1) *Calculer $f(-1)$ et en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.*

$f(-1)=-2(-1+2)e^{-(-1)}=-2e^1=-2e\simeq-5,44$

2) *Dans le repère orthogonal ci-dessous trois courbes C_1, C_2 et C_3 ont été représentées.*



L'une de ces courbes représente f, une autre représente sa dérivée et la troisième représente sa dérivée seconde.

a) *Indiquer, en justifiant, la courbe représentant la fonction f, celle représentant f' et celle représentant f''.*

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonction polynômiale et exponentielle.

Pour tout $x \in]0;+\infty[$:

$$f'(x) = -2\times e^{-x} - 2(x+2)\times(-e^{-x}) = [-2+2(x+2)]e^{-x} = (2x+2)e^{-x}$$

La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonction polynômiale et exponentielle.

Pour tout $x \in]0;+\infty[$: $f''(x) = 2\times e^{-x} + (2x+2)\times(-e^{-x}) = [2-(2x+2)]e^{-x} = -2xe^{-x}$

→La relation $f(-1) \simeq -5,44$ indique que C_3 est la courbe représentant la fonction f.

→La courbe C_3 est décroissante sur $]-\infty;-1]$ donc la dérivée de f doit être négative sur cet intervalle : cela correspond à la courbe C_1.

→La courbe C_1 est croissante sur $]-\infty;0]$ donc la dérivée de f' doit être positive sur cet intervalle : cela correspond à la courbe C_2.

b) *Expliquer comment ces représentations graphiques permettent de déterminer la convexité de la fonction f.*

La courbe C_2 représentant la dérivée seconde est positive sur $]-\infty;0]$ et négative sur $[0;+\infty[$, donc la fonction f est convexe sur $]-\infty;0]$ et concave sur $[0;+\infty[$.

c) *La courbe de f a-t-elle un point d'inflexion ?*
Si c'est le cas, donner l'abscisse de ce point.

La dérivée seconde f'' s'annule en 0 en changeant de signe, donc la courbe représentant f admet un point d'inflexion d'abscisse 0.

.