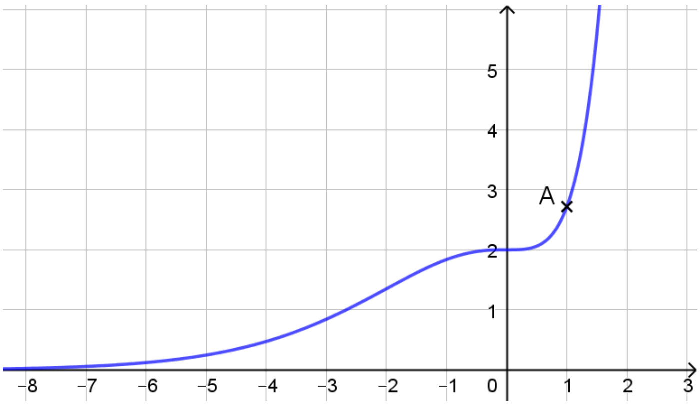
Exercice 4C.1 :

Soit f la fonction définie pour tout réel x par : $f(x)=\left(x^2-2x+2\right)e^x$.

Sa courbe représentative notée C_f est tracée ci-dessous dans le plan muni d'un repère orthonormé.



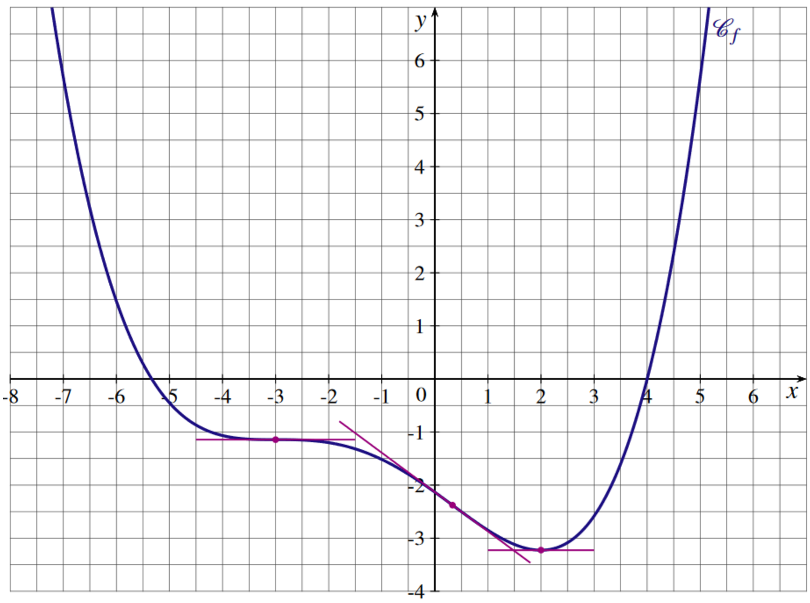
1. a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
   Montrer que pour tout nombre réel x, on a : $f'(x)=x^2e^x$.
   b) Etudier les variations de la fonction f.
2. Montrer que dans l'intervalle $[1;2]$, l'équation $f(x)=4$ admet une unique solution α.
   A l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur arrondie de α au dixième près.
3. Déterminer une équation de la tangente D à la courbe C_f au point A d'abscisse 1.
   Tracer la droite D dans le repère précédent.
4. a) On note f'' la dérivée seconde de la fonction f. Calculer $f''(x)$.
   b) Etudier la convexité de la fonction f.
   c) Calculer les coordonnées des points d'inflexion de la courbe C_f.

Exercice 4C.2 :

Sur le graphique ci-contre, on a tracé la courbe représentative C_f d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

On note f' la dérivée de la fonction f et f'' la dérivée seconde de la fonction f.

A partir du graphique, déterminer dans chacun des cas, lequel des trois symboles $<$, $=$ ou $>$ est approprié :

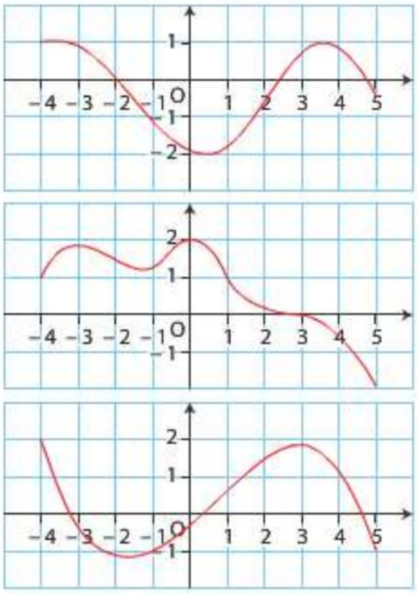


$f(-6)\ldots 0$	$f'(-6)\ldots 0$	$f(-1)\ldots f(3)$	$f'(-1)\ldots f'(3)$
$f'(-6)\ldots f'(-1)$	$f'(-3)\ldots 0$	$f'(2)\ldots 0$	$f'(-7)\ldots f'(3)$
$f''(-6)\ldots f''(-1)$	$f''(-3)\ldots 0$	$f''(2)\ldots 0$	$f''(-1)\ldots f''(1)$

Exercice 4C.3 :

Parmi les trois courbes, déterminer celle qui représente une fonction f vérifiant :

- f est concave sur $[-4;-2]$ et sur $[4;5]$;
- f' s'annule au moins trois fois ;
- la courbe de f admet quatre points d'inflexion.



Exercice 4C.4 :

Soit f la fonction définie sur $[2;5]$ par $f(x)=\dfrac{x+4}{x-1}$. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentant f dans un repère.

Etudier la position de la tangente à $\mathscr{C}$ en 3 par rapport à la courbe $\mathscr{C}$.

Exercice 4C.5 :

Une entreprise fabrique des clés USB avec un maximum de 10 000 par mois. Le coût de fabrication C (en milliers d'euros) de x milliers de clés produites s'exprime par $C(x)=0,05x^3-1,05x^2+8x+4$.

a) A l'aide d'une calculatrice graphique, évaluer la convexité de la fonction C.
En déduire si la courbe possède un point d'inflexion.

b) Démontrer ces résultats.

c) Interpréter les résultats obtenus.

Exercice 4C.6 :

Soit f la fonction définie pour tout réel $x\in]0;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{x^2+x-1}{x^2}$.

On note C_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

1. Déterminer les coordonnées des points d'intersection éventuels de la courbe C_f avec l'axe des abscisses.
2. On note f' la dérivée de la fonction f.

   a) Montrer que pour tout réel pour tout réel $x\in]0;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{2-x}{x^3}$.

   b) Donner le tableau des variations de la fonction f.
3. a) Etudier la convexité de la fonction f.

   b) La courbe représentative de la fonction f a-t-elle un point d'inflexion ?
4. Montrer que l'équation $f'(x)=\dfrac{1}{2}$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[1;2]$.

   A l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur arrondie de α à 10^{-2} près.

Exercice 4C.7 :

Partie A

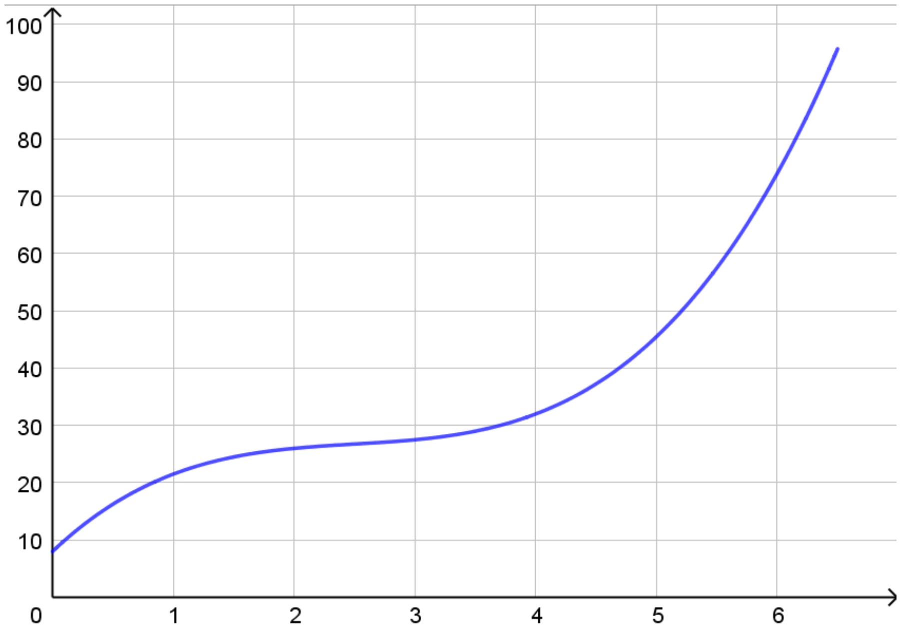
Soit f la fonction définie pour tout réel x par : $f(x)=x^3-7,5x^2+20x+8$. On note C_f sa courbe représentative dans le plan.

1. Etudier les variations de la fonction f.
2. a) Etudier la convexité de la fonction f.
   b) La courbe C_f admet-elle un point d'inflexion ? Si oui, déterminer ses coordonnées.

Partie B

La fonction f modélise sur l'intervalle $]0;6,5]$ le coût total de production exprimé en milliers d'euros, où x désigne le nombre de milliers d'articles fabriqués par une entreprise.

La courbe représentative de la fonction coût total, sur l'intervalle $]0;6,5]$, est donnée ci-dessous :



Le prix de vente d'un article est fixé à 13,25 €. On suppose que toute la production est vendue.

1. Déterminer graphiquement, avec la précision permise par le graphique :
   a) l'intervalle dans lequel doit se situer la production x pour que l'entreprise réalise un bénéfice positif ;
   b) la production x_0 pour laquelle le bénéfice est maximal.
2. On considère la fonction B définie sur l'intervalle $]0;6,5]$ par : $B(x)=13,25x-f(x)$.
   a) Etudier les variations de B sur l'intervalle $]0;6,5]$.
   b) En déduire le nombre d'articles qu'il faut fabriquer et vendre pour obtenir un bénéfice maximal. Quel est le montant, en euro, de ce bénéfice maximal ?
3. Le coût marginal de fabrication pour une production de x milliers d'articles est donné par $f'(x)$ où f' est la dérivée de la fonction f.
   Vérifier que si le bénéfice est maximal, alors le coût marginal est égal au prix de vente d'un article.

Partie C

Le coût moyen de production C mesure le coût en euro par article produit.

On considère la fonction C définie sur l'intervalle $]0;6,5]$ par : $C(x)=\dfrac{f(x)}{x}$.

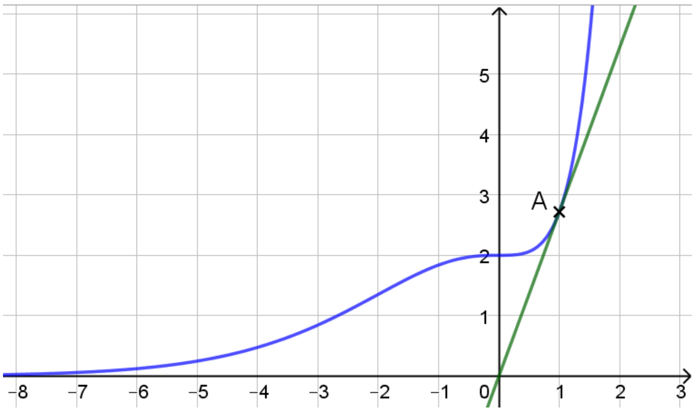
1. Soit A le point d'abscisse a de la courbe C_f.
   a) Montrer que le coefficient directeur de la droite (OA) est égal au coût moyen $C(a)$.
   b) Conjecturer graphiquement les variations de la fonction C.
2. On désigne par C' la dérivée de la fonction C.
   a) Montrer que $C'(x)=\dfrac{(x-4)\left(2x^2+0,5x+2\right)}{x^2}$.
   b) Etudier les variations de la fonction C.
   c) En déduire le prix de vente minimal, arrondi à l'euro près, d'un article pour que l'entreprise ne travaille pas à perte.
3. Justifier que lorsque le coût moyen est minimal, alors le coût moyen est égal au coût marginal.

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. Quet

Exercice 4C.1 :

Soit f la fonction définie pour tout réel x par : $f(x)=\left(x^2-2x+2\right)e^x$.

Sa courbe représentative notée C_f est tracée ci-dessous dans le plan muni d'un repère orthonormé.



1. a) *On note f' la fonction dérivée de la fonction f.*

Montrer que pour tout nombre réel x, on a : $f'(x)=x^2e^x$.

La fonction f est dérivable en tant que produit de fonctions polynômiales et exponentielle :

$$\forall x\in\mathbb{R} : \ f'(x)=(2x-2)e^x+\left(x^2-2x+2\right)e^x=x^2e^x.$$

b) *Etudier les variations de la fonction f.*

$\forall x\in\mathbb{R}$: $x^2\geq 0$ et $e^x>0$, donc $f'(x)\geq 0$ et la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

2. *Montrer que dans l'intervalle $[1;2]$, l'équation $f(x)=4$ admet une unique solution α.*

A l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur arrondie de α au dixième près.

La fonction f est continue et strictement croissante sur $[1;2]$.

$f(1)=\left(1^2-2\times1+2\right)e^1=e$ et $f(2)=\left(2^2-2\times2+2\right)e^2=2e^2$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=4$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1;2]$.

On obtient : $\alpha\simeq 1{,}3$.

3. *Déterminer une équation de la tangente D à la courbe C_f au point A d'abscisse 1.*

Tracer la droite D dans le repère précédent.

L'équation de la tangente est :

$$y=f'(1)\times(x-1)+f(1).$$

Or : $f(1)=\left(1^2-2\times1+2\right)e^1=e$

$f'(1)=1^2\times e^1=e$.

Ainsi : $y=e\times(x-1)+e=e\times x$.

La tangente est représentée ci-dessus.

4. a) *On note f'' la dérivée seconde de la fonction f. Calculer $f''(x)$.*

$$f''(x)=2xe^x+x^2e^x=\left(2x+x^2\right)e^x=x(2+x)e^x$$

b) *Etudier la convexité de la fonction f.*

$$\forall x>-2 : \ 2+x>0 \ \text{ et } \ \forall x\in\mathbb{R} : \ e^x>0.$$

Si $x \in]-\infty;-2[\cup]0;+\infty[$: $f''(x) > 0$ et la fonction f est convexe.

Si $x \in]-2;0[$: $f''(x) < 0$ et la fonction f est concave.

c) *Calculer les coordonnées des points d'inflexion de la courbe C_f.*

La dérivée seconde s'annule deux fois en changeant de signe, donc la courbe représentant la fonction f possède deux points d'inflexion :

$$f''(-2) = f''(0) = 0.$$

Or : $$f(-2) = \left((-2)^2 - 2\times(-2) + 2\right)e^{-2} = 10e^{-2}$$

$$f(0) = \left(0^2 - 2\times 0 + 2\right)e^0 = 2.$$

Les coordonnées des points d'inflexion sont :

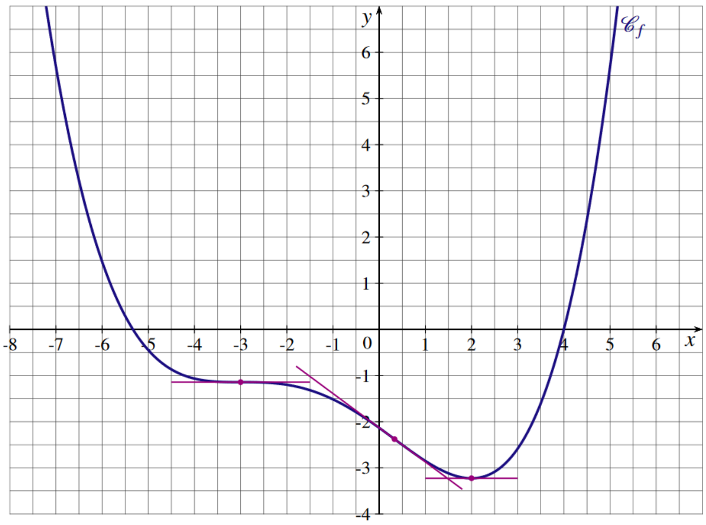
$$\left(-2;10e^{-2}\right) \text{ et } (0;2)$$

Exercice 4C.2 :

Sur le graphique ci-contre, on a tracé la courbe représentative C_f d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

On note f' la dérivée de la fonction f et f'' la dérivée seconde de la fonction f.

A partir du graphique, déterminer dans chacun des cas, lequel des trois symboles $<$, $=$ ou $>$ est approprié :

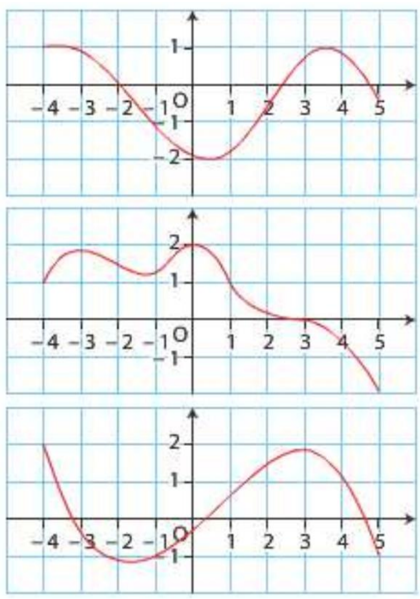


$f(-6) > 0$	$f'(-6) < 0$	$f(-1) > f(3)$	$f'(-1) < f'(3)$
$f'(-6) < f'(-1)$	$f'(-3) = 0$	$f'(2) < 0$	$f'(-7) < f'(3)$
$f''(-6) > f''(-1)$	$f''(-3) = 0$	$f''(2) < 0$	$f''(-1) < f''(1)$

Exercice 4C.3 :

Parmi les trois courbes, déterminer celle qui représente une fonction f vérifiant :

- *f est concave sur $[-4;-2]$ et sur $[4;5]$;*
- *f' s'annule au moins trois fois ;*
- *la courbe de f admet quatre points d'inflexion.*



f est concave sur $[-4;-2]$: cela exclue la 3ème courbe.

f' s'annule au moins trois fois : cela exclue la 3ème courbe.

La courbe de f admet quatre points d'inflexion : cela exclue la première courbe.

La courbe représentant la fonction f est la deuxième.

Exercice 4C.4 :

Soit f la fonction définie sur $[2;5]$ par $f(x)=\dfrac{x+4}{x-1}$. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentant f dans un repère.

Etudier la position de la tangente à $\mathcal{C}$ en 3 par rapport à la courbe $\mathcal{C}$.

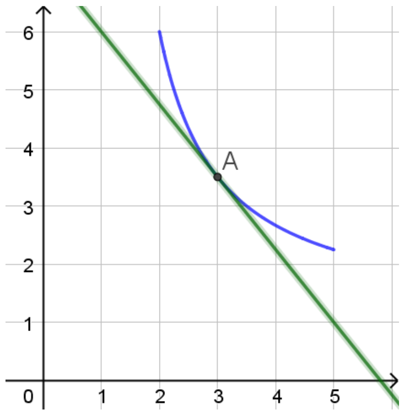
La fonction f est dérivable sur $[2;5]$ en tant que quotient de fonctions polynômiales de dénominateur non nul.

$$f'(x)=\frac{1\times(x-1)-(x+4)\times 1}{(x-1)^2}=\frac{x-1-x-4}{(x-1)^2}=\frac{-5}{(x-1)^2}$$

$$f''(x)=\frac{-(-5)\times 2(x-1)\times 1}{\left[(x-1)^2\right]^2}=\frac{10(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{10}{(x-1)^3}$$

$\forall x\in[2;5]$: $x-1>0$ d'où : $f''(x)>0$.

On obtient $f''(3)>0$: la courbe représentant la fonction f est convexe sur l'intervalle $[2;5]$ et la *courbe* $\mathcal{C}$ est au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 3.



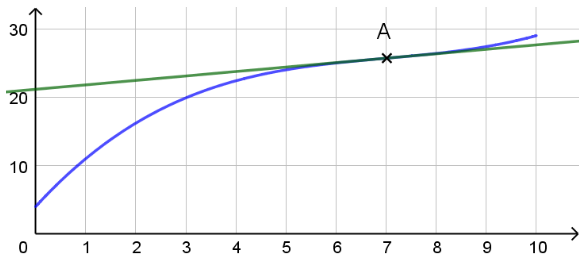
Exercice 4C.5 :

Une entreprise fabrique des clés USB avec un maximum de 10 000 par mois. Le coût de fabrication C (en milliers d'euros) de x milliers de clés produites s'exprime par $C(x)=0,05x^3-1,05x^2+8x+4$.

a) *A l'aide d'une calculatrice graphique, évaluer la convexité de la fonction C.*
En déduire si la courbe possède un point d'inflexion.

La courbe semble concave sur l'intervalle $[0;7]$ et convexe sur l'intervalle $[7;+\infty[$.

Elle possède un point d'inflexion dont l'abscisse est voisine de 7.



b) *Démontrer ces résultats.*

La fonction C est dérivable en tant que fonction polynômiale : pour tout réel x positif :

$$C'(x)=0,15x^2-2,1x+8$$

$$C''(x)=0,3x-2,1$$

Ainsi : $C''(x)>0 \iff 0,3x-2,1>0 \iff 0,3x>2,1 \iff x>\dfrac{2,1}{0,3} \iff x>7$.

La courbe semble concave sur l'intervalle $[0;7]$ et convexe sur l'intervalle $[7;+\infty[$.

Le point d'inflexion a pour abscisse 7.

c) *Interpréter les résultats obtenus.*

Lorsque la production augmente de 0 à 7000 clés USB, le coût de production unitaire diminue progressivement ; à partir de 7000 clés USB, le coût unitaire ré-augmente progressivement.

Exercice 4C.6 :

Soit f la fonction définie pour tout réel $x\in]0;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{x^2+x-1}{x^2}$.

On note C_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

1. *Déterminer les coordonnées des points d'intersection éventuels de la courbe C_f avec l'axe des abscisses.*

$f(x)=0 \Leftrightarrow x^2+x-1=0$ $\quad\rightarrow \Delta=1^2+4=5$ donc deux racines :

$x_1=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ $\quad\rightarrow$on ne retient que la seconde racine positive.

$$f(x_2)=f\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)-1}{\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2}=\frac{\dfrac{1-2\sqrt{5}+5}{4}+\dfrac{-2+2\sqrt{5}}{4}-\dfrac{4}{4}}{\dfrac{1-2\sqrt{5}+5}{4}}$$

$$=\frac{0}{\dfrac{1-2\sqrt{5}+5}{4}}=0$$

Sur l'intervalle $]0;+\infty[$, les coordonnées du seul point d'intersection de la courbe C_f avec l'axe des abscisses sont : $\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2};0\right)$.

2. *On note f' la dérivée de la fonction f.*

a) *Montrer que pour tout réel pour tout réel $x\in]0;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{2-x}{x^3}$.*

La fonction f est dérivable en tant que quotient de fonctions polynômiales ; pour tout réel x positif :

$$f'(x)=\frac{(2x+1)\times x^2-\left(x^2+x-1\right)\times 2x}{\left(x^2\right)^2}=\frac{\left(2x^3+x^2\right)-\left(2x^3+2x^2-2x\right)}{x^4}=\frac{-x^2+2x}{x^4}$$

$$=\frac{2-x}{x^3}$$

b) *Donner le tableau des variations de la fonction f.*

$\forall x\in]0;+\infty[$: $x^3>0$ et $2-x>0 \Leftrightarrow -x>-2 \Leftrightarrow x<2$.

Donc si $x\in]0;2[$: $f'(x)>0$ et la fonction f est croissante ;

Donc si $x>2$: $f'(x)<0$ et la fonction f est décroissante.

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	1	$\nearrow$	$1,25$	$\searrow$	1

$$f(2)=\frac{2^2+2-1}{2^2}=\frac{5}{4}=1,25$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=1 \textit{ (chapitre suivant)}$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2+x-1}{x^2}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2\left(1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)}{x^2}=\lim_{x\to +\infty}1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=1$$

3. ***a)*** *Etudier la convexité de la fonction f.*

$$f''(x)=\frac{-1\times x^3-(2-x)\times 3x^2}{\left(x^3\right)^2}=\frac{-x^3-6x^2+3x^3}{x^6}=\frac{2x^3-6x^2}{x^6}=\frac{2x^2(x-6)}{x^6}=\frac{2(x-6)}{x^4}$$

$\forall x\in]0;+\infty[$: $x^4>0$ et $x-6>0 \Leftrightarrow x>6$.

$\forall x\in]6;+\infty[$: $f''(x)>0$ et la fonction f est convexe ;

$\forall x\in]0;6[$: $f''(x)<0$ et la fonction f est concave.

b) *La courbe représentative de la fonction f a-t-elle un point d'inflexion ?*

La dérivée seconde s'annule une fois en changeant de signe au point d'abscisse 6 : la courbe possède un point d'inflexion.

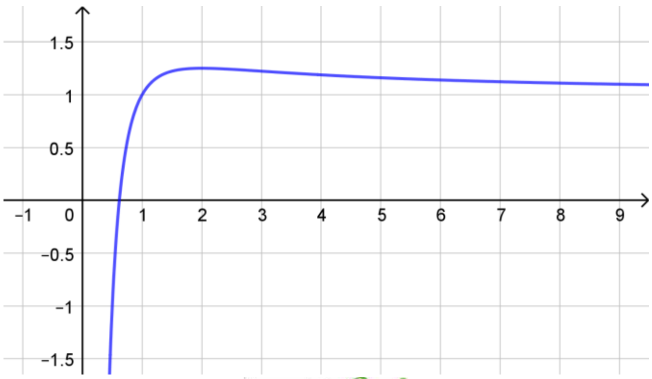
4. *Montrer que l'équation $f'(x)=\frac{1}{2}$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[1;2]$.*

A l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur arrondie de α à 10^{-2} près.

$\forall x\in]0;6[$: $f''(x)<0$ donc sur l'intervalle $[1;2]$, la fonction f' est continue et strictement décroissante. D'autre part : $f'(1)=\frac{2-1}{1^3}=1$ et $f'(2)=\frac{2-2}{2^3}=0$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f'(x)=\frac{1}{2}$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[1;2]$.

A 10^{-2} près, on obtient : $\alpha\simeq 1{,}18$.



Exercice 4C.7 :

Partie A

Soit f la fonction définie pour tout réel x par : $f(x)=x^3-7{,}5x^2+20x+8$. On note C_f sa courbe représentative dans le plan.

1. *Etudier les variations de la fonction f.*

La fonction f est dérivable en tant que fonction polynômiale ; pour tout réel x :

$$f'(x)=3x^2-15x+20 \qquad \rightarrow \Delta=(-15)^2-4\times 3\times 20=225-240=-15$$

$a=3$ donc la parabole est « orientée vers le haut »

Pour tout réel x, la dérivée ne s'annule pas et est toujours positive et la fonction f est strictement croissante.

2. ***a)*** *Etudier la convexité de la fonction f.*

$$f''(x)=6x-15$$

D'où : $f''(x)>0 \Leftrightarrow 6x-15>0 \Leftrightarrow 6x>15 \Leftrightarrow x>\frac{15}{6} \Leftrightarrow x>\frac{5}{2}$

Sur l'intervalle $\left]-\infty;\frac{5}{2}\right[$, $f''(x)<0$ et la fonction f est concave ;

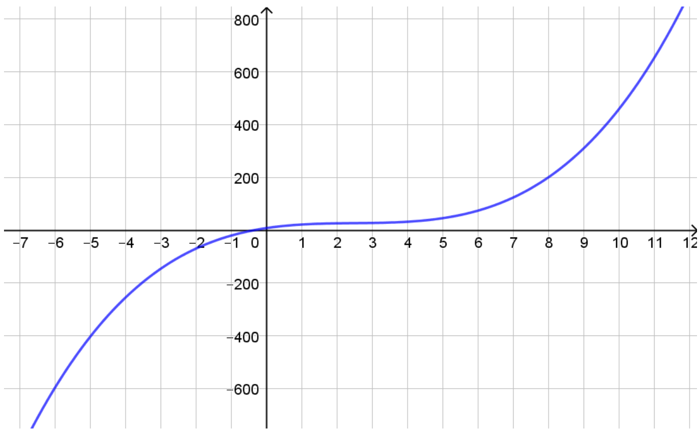
Sur l'intervalle $\left]\frac{5}{2};+\infty\right[$, $f''(x)>0$ et la fonction f est convexe.

b) *La courbe C_f admet-elle un point d'inflexion ? Si oui, déterminer ses coordonnées.*

La dérivée seconde s'annule une seule fois en changeant de signe, donc la courbe représentant la fonction f admet un unique point d'inflexion d'abscisse $x=\frac{5}{2}$.

$$f\left(\frac{5}{2}\right)=\left(\frac{5}{2}\right)^3-7,5\times\left(\frac{5}{2}\right)^2+20\left(\frac{5}{2}\right)+8=\frac{125}{8}-7,5\times\frac{25}{4}+50+8$$
$$=\frac{125}{8}-\frac{375}{8}+\frac{400}{8}+\frac{64}{8}=\frac{214}{8}=\frac{107}{4}.$$

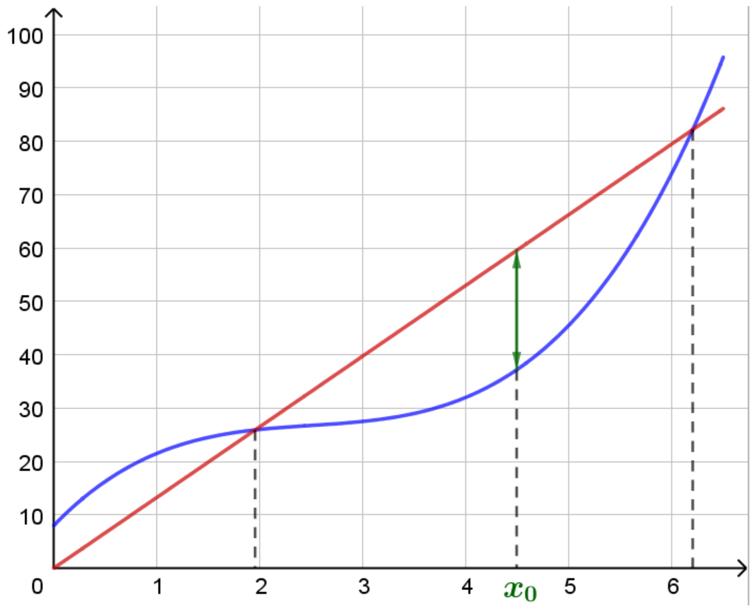
Les coordonnées du point d'inflexion sont : $\left(\frac{5}{2};\frac{107}{4}\right)$.



Partie B

La fonction f modélise sur l'intervalle $]0;6,5]$ le coût total de production exprimé en milliers d'euros, où x désigne le nombre de milliers d'articles fabriqués par une entreprise.

La courbe représentative de la fonction coût total, sur l'intervalle $]0;6,5]$, est donnée ci-dessous :



Le prix de vente d'un article est fixé à 13,25 €. On suppose que toute la production est vendue.

1. *Déterminer graphiquement, avec la précision permise par le graphique :*

a) *l'intervalle dans lequel doit se situer la production x pour que l'entreprise réalise un bénéfice positif ;*

On doit tracer sur le graphique ci-dessus la droite des recettes d'équation : $y=13,25x$.

La droite des recettes est au-dessus de la courbe des coûts sur l'intervalle $]2;6,2[$, ce qui correspond à une production comprise entre 2000 et 6200 articles environ.

b) *la production x_0 pour laquelle le bénéfice est maximal.*

Le bénéfice semble maximal pour environ $x=4,5$, soit une production de 4500 articles environ.

2. *On considère la fonction B définie sur l'intervalle $]0;6,5]$ par : $B(x)=13,25x-f(x)$.*

a) *Etudier les variations de B sur l'intervalle $]0;6,5]$.*

« bénéfice = recettes – coûts »

Pour tout réel $x\in]0;6,5]$:

$$B(x)=13,25x-f(x)=13,25x-\left(x^3-7,5x^2+20x+8\right)=-x^3+7,5x^2-6,75x-8$$

La fonction B est dérivable en tant que fonction polynômiale ; pour tout réel $x\in]0;6,5]$

$$B'(x)=-3x^2+15x-6,75 \qquad \rightarrow \Delta=15^2-4\times(-3)\times(-6,75)=225-81=144=12^2$$

donc deux racines :

$$x_1=\frac{-15-12}{2\times(-3)}=\frac{-27}{-6}=\frac{9}{2} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-15+12}{2\times(-3)}=\frac{-3}{-6}=\frac{1}{2}$$

$a=-1$ donc la parabole est « orientée vers le bas »

Si $x\in\left[\frac{1}{2};\frac{9}{2}\right]$: $B'(x)\geq 0$ et la fonction B est croissante ;

Si $x\in\left]0;\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{9}{2};6,5\right[$: $B'(x)<0$ et la fonction B est décroissante.

b) *En déduire le nombre d'articles qu'il faut fabriquer et vendre pour obtenir un bénéfice maximal. Quel est le montant, en euro, de ce bénéfice maximal ?*

On obtient le tableau suivant pour la fonction B :

x	0		$0,5$		$4,5$		$6,5$
$B'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
B		$\searrow$	$-9,625$	$\nearrow$	$22,375$	$\searrow$	$-9,625$

$B(0,5)=-(0,5)^3+7,5\times(0,5)^2-6,75\times0,5-8=-9,625$

$B(4,5)=22,375$

$B(6,5)=-9,625$

Le bénéfice est maximal pour $x=4,5$, soit une production de 4500 articles.

Ce bénéfice maximal vaut $22\,375\,000$ €.

3. *Le coût marginal de fabrication pour une production de x milliers d'articles est donné par $f'(x)$ où f' est la dérivée de la fonction f.*

Vérifier que si le bénéfice est maximal, alors le coût marginal est égal au prix de vente d'un article.

Le bénéfice est maximal pour $x=4,5$.

$$f'(4,5)=13,25.$$

Le coût marginal est égal au prix de vente d'un article.

Partie C

Le coût moyen de production C mesure le coût en euro par article produit.

On considère la fonction C définie sur l'intervalle $]0;6,5]$ par : $C(x)=\dfrac{f(x)}{x}$.

1. *Soit A le point d'abscisse a de la courbe C_f.*

a) *Montrer que le coefficient directeur de la droite (OA) est égal au coût moyen $C(a)$.*

Le point A d'abscisse a appartient à la courbe C_f, ses coordonnées sont $(a; f(a))$.

Le coefficient directeur de la droite (OA) est :

$$\frac{y_{\mathrm{A}}-y_{\mathrm{O}}}{y_{\mathrm{A}}-y_{\mathrm{O}}}=\frac{f(a)}{a}=C(a).$$

b) *Conjecturer graphiquement les variations de la fonction C.*

$$C(x)=\frac{f(x)}{x}=\frac{x^3-7,5x^2+20x+8}{x}=x^2-7,5x+20+\frac{8}{x}$$

Le terme $\dfrac{8}{x}$ va être de plus en plus petit, l'expression $x^2-7,5x+20$ est décrite par une parabole « orientée vers le haut » de sommet $\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{7,5}{2}=3,75$.

La fonction C devrait se comporter à peu près comme l'expression $x^2-7,5x+20$ sur $]0;6,5]$.

2. *On désigne par C' la dérivée de la fonction C.*

a) *Montrer que $C'(x)=\dfrac{(x-4)\left(2x^2+0,5x+2\right)}{x^2}$.*

La fonction C est définie par :

$$C(x)=\frac{f(x)}{x}=\frac{x^3-7,5x^2+20x+8}{x}$$

Cette fonction est dérivable en tant que quotient de fonctions polynômiales ; pour tout réel $x\in]0;6,5]$

$$C'(x)=\frac{\left(3x^2-15x+20\right)\times x-\left(x^3-7,5x^2+20x+8\right)\times 1}{x^2}$$

$$=\frac{3x^3-15x^2+20x-x^3+7,5x^2-20x-8}{x^2}$$

$$=\frac{2x^3-7,5x^2-8}{x^2}$$

Or : $(x-4)\left(2x^2+0,5x+2\right)=2x^3+0,5x^2+2x-8x^2-2x-8=2x^3-7,5x^2-8$

Donc : $C'(x)=\dfrac{(x-4)\left(2x^2+0,5x+2\right)}{x^2}$

b) *Etudier les variations de la fonction C.*

Etude de l'expression $2x^2+0,5x+2$: $\Delta=0,5^2-4\times2\times2=-15,75$

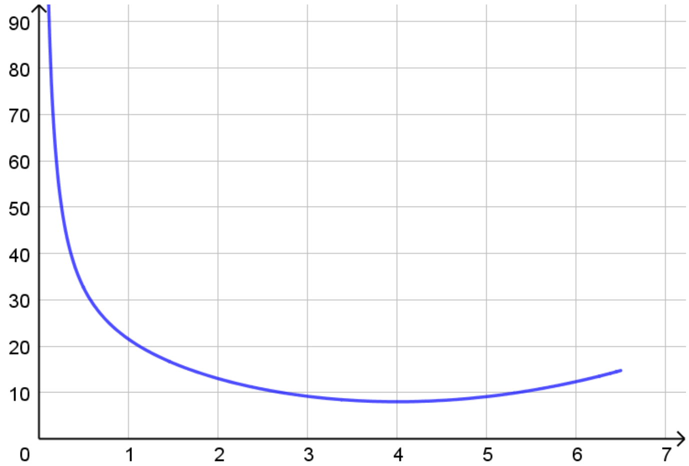
Cette expression n'admet aucune racine et $a=2$ donc elle est toujours strictement positive.

Le dénominateur est lui aussi strictement positif.

$x-4>0 \Leftrightarrow x>4$.

Ainsi : si $x\in\left]4;6{,}5\right]$: $C'(x)>0$ et la fonction C est strictement croissante ;

si $x\in\left]0;4\right[$: $C'(x)<0$ et la fonction C est strictement décroissante.



c) *En déduire le prix de vente minimal, arrondi à l'euro près, d'un article pour que l'entreprise ne travaille pas à perte.*

On obtient : $C(4)=\dfrac{4^3-7{,}5\times4^2+20\times4+8}{4}=8$.

Le prix de vente minimal est de 4 € afin d'être certain de ne pas travailler à perte.

3. *Justifier que lorsque le coût moyen est minimal, alors le coût moyen est égal au coût marginal.*
Lorsque le coût moyen est minimal, pour une production de 4000 articles, on obtient :

$f'(4)=8$

4. En effet : $f'(4)=C(4)=8$: le coût moyen est égal au coût marginal.