Exercices à prise d'initiative sur les fonctions et la dérivation

Exercice 1 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + 14$

On note C_f la courbe représentative de *f*, T_a la tangente à C_f en a et *d* la droite d'équation $y = -x - 4$.

Pour quelle(s) valeur(s) de *a* la droite T_a est-elle parallèle à *d* ?

Exercice 2 :

La courbe *C* représente dans un repère orthonormé d'origine O la fonction f définie sur $[-2;2]$ par :

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

Soit a un réel de $]-2;2[$, A le point de C d'abscisse a et T la tangente à la courbe C au point A. Que dire de *T* et de (OA)?

Exercice 3 :

Parmi tous les triangles ABC rectangles en A tels que $\mathrm{BC} = 8\,\mathrm{cm}$. Existe-il une triangle qui a un périmètre plus grand que les autres ?
Généralisation : et pour un triangle d'hypoténuse *b* cm ?

Exercice 4 :

Déterminer toutes les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout réel x : $f(x) = (f(x))^2$

Exercice 5 : Test d'entrée à Oxford

Soit la fonction $f(x) = x^2 - 5x + 7$.

Quelles sont les coordonnées du minimum de $f(x-2)$?

CORRIGE – Notre Dame de La Merci –Montpellier – M. Quet

Exercice 1 :

Soit la fonction f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + 14$

On note C_f *la courbe représentative de f,* T_a *la tangente à* C_f *en a et d la droite d'équation* $y = -x - 4$.

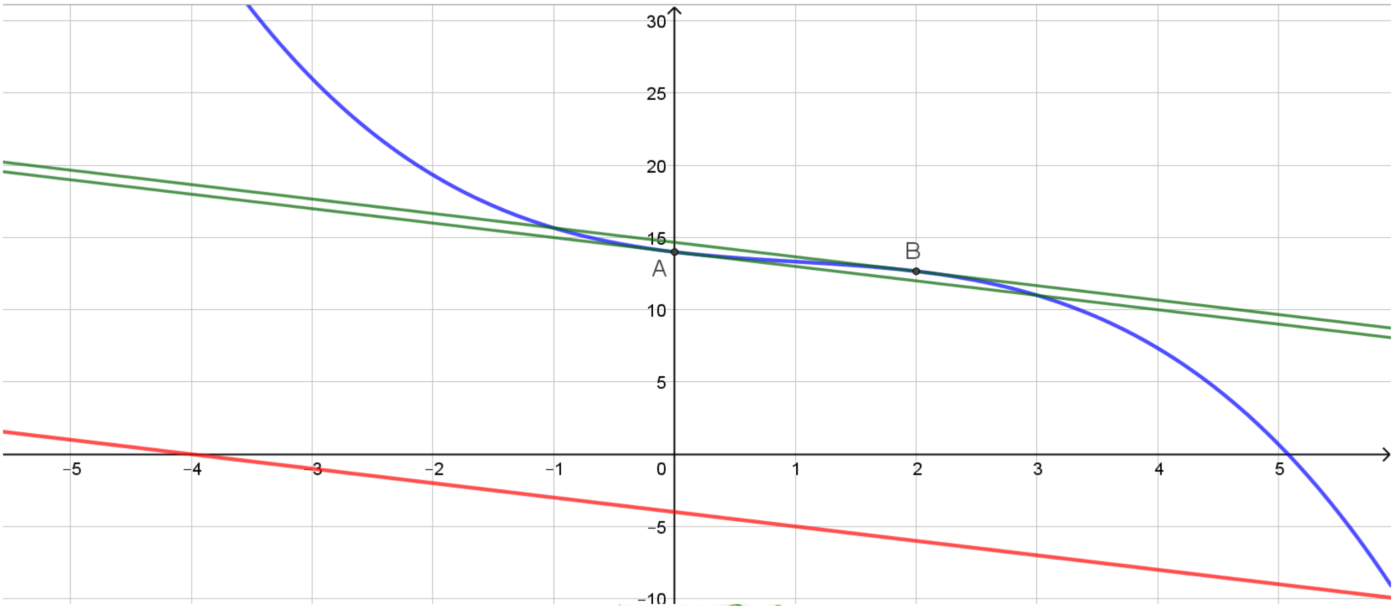
Pour quelle(s) valeur(s) de a la droite T_a *est-elle parallèle à d ?*

Deux droites parallèles ont le même coefficient directeur et la dérivée est égale à la pente de la tangente en un point. On doit résoudre l'équation :

$$f'(x) = -1 \quad \text{avec} \quad f'(x) = -\frac{1}{6} \times 3x^2 + \frac{1}{2} \times 2x - 1 = -\frac{1}{2}x^2 + x - 1$$

Ainsi : $-\frac{1}{2}x^2 + x - 1 = -1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x\left(-\frac{1}{2}x + 1\right) = 0$

Soit $x = 0$, soit $-\frac{1}{2}x + 1 = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x = -1 \Leftrightarrow x = -1 \times \left(\frac{-2}{1}\right) = 2$



Exercice 2 :

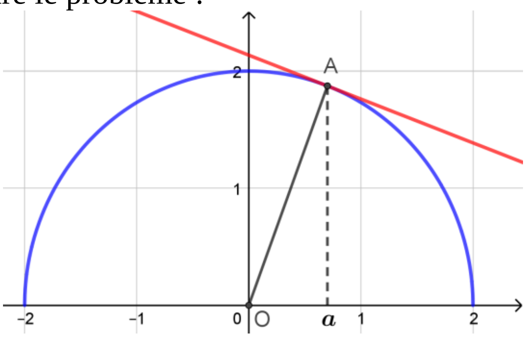
La courbe C représente dans un repère orthonormé d'origine O la fonction f *définie sur* $[-2;2]$ *par :*

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

Soit a un réel de $]-2;2[$, *A le point de C d'abscisse a et T la tangente à la courbe C au point A.*

Que dire de T et de (OA) *?*

Un schéma peut aider à comprendre le problème :



Les coordonnées de A sont $\left(a; \sqrt{4 - a^2}\right)$. Un vecteur directeur de la droite (OA) est $\overrightarrow{OA}\begin{vmatrix} a \\ \sqrt{4 - a^2} \end{vmatrix}$.

La dérivée est égale à la pente de la tangente, donc le coefficient directeur de la tangente en A est $f'(a)$.

f est dérivable en tant que racine carrée de fonction polynômiale :

$$f'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}=\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} \quad \text{et} \quad f'(a)=\frac{-a}{\sqrt{4-a^2}}.$$

Un vecteur directeur de la tangente T est $\vec{u}\left|\begin{matrix}1\\ \dfrac{-a}{\sqrt{4-a^2}}\end{matrix}\right.$.

Ainsi : $\vec{u}.\overrightarrow{OA}=1\times a+\dfrac{-a}{\sqrt{4-a^2}}\times\sqrt{4-a^2}=a-a=0$: la droite (OA) et la tangente T sont perpendiculaires.

Exercice 3 :

Parmi tous les triangles ABC rectangles en A tels que BC = 8 cm. Existe-il une triangle qui a un périmètre plus grand que les autres ? ***Généralisation*** *: et pour un triangle d'hypoténuse b cm ?*

Les dimensions du rectangle sont *x*, y et 8 cm.

D'après le théorème de Pythagore :

$$x^2+y^2=8^2 \iff y^2=64-x^2 \iff y=\sqrt{64-x^2}$$

Le périmètre du triangle est représenté par la fonction *f* définie par :

$$f(x)=x+\sqrt{64-x^2}+8$$

Cette fonction est dérivable en tant que somme et racine carrée de fonctions polynômiales :

$$f'(x)=1+\frac{-2x}{2\sqrt{64-x^2}}=1-\frac{x}{\sqrt{64-x^2}}=\frac{\sqrt{64-x^2}-x}{\sqrt{64-x^2}}\times\frac{\sqrt{64-x^2}+x}{\sqrt{64-x^2}+x}$$

$$=\frac{64-x^2-x^2}{\sqrt{64-x^2}\times\left(\sqrt{64-x^2}+x\right)}=\frac{64-2x^2}{\sqrt{64-x^2}\times\left(\sqrt{64-x^2}+x\right)}$$

x étant positif, le dénominateur est positif, ainsi la dérivée est positive si

$$64-2x^2>0 \iff -2x^2>-64 \iff x^2<\frac{-64}{-2} \iff x^2<32 \iff x\in\left[0;\sqrt{32}\right[$$

Ainsi : si $x<4\sqrt{2}$ alors $f'(x)>0$ et la fonction est croissante

si $x>4\sqrt{2}$ alors $f'(x)<0$ et la fonction est décroissante

La fonction admet donc un maximum en $4\sqrt{2}$ et ce maximum vaut :

$$f\left(4\sqrt{2}\right)=4\sqrt{2}+\sqrt{64-\left(4\sqrt{2}\right)^2}+8=4\sqrt{2}+\sqrt{64-32}+8=4\sqrt{2}+4\sqrt{2}+8=8+8\sqrt{2}\text{ cm.}$$

Il existe donc bien ce fameux triangle dont le périmètre est le plus grand.

Généralisation : il faut juste remplacer 64 par *b* avec $b>0$.

La fonction devient : $f(x)=x+\sqrt{b^2-x^2}+b$

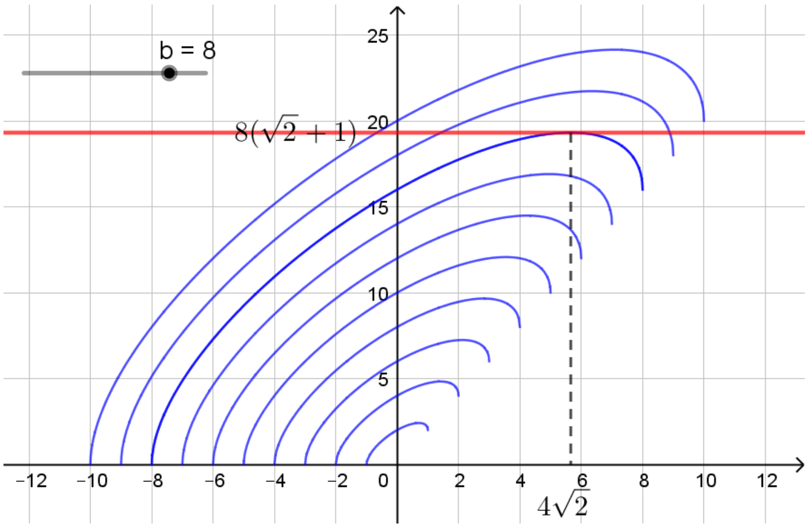
La dérivée est : $f'(x)=1+\dfrac{-2x}{2\sqrt{b^2-x^2}}=1-\dfrac{x}{\sqrt{b^2-x^2}}=\dfrac{\sqrt{b^2-x^2}-x}{\sqrt{b^2-x^2}}\times\dfrac{\sqrt{b^2-x^2}+x}{\sqrt{b^2-x^2}+x}$

$$=\frac{b^2-x^2-x^2}{\sqrt{b^2-x^2}\times\left(\sqrt{b^2-x^2}+x\right)}=\frac{b^2-2x^2}{\sqrt{b^2-x^2}\times\left(\sqrt{b^2-x^2}+x\right)}$$

La dérivée s'annule si $b^2-2x^2=0 \iff -2x^2=-b^2 \iff x=\sqrt{\dfrac{b^2}{2}}$

Le périmètre maximal est :

$$f\left(\sqrt{\frac{b^2}{2}}\right)=\sqrt{\frac{b^2}{2}}+\sqrt{b^2-\left(\sqrt{\frac{b^2}{2}}\right)^2}+b=\sqrt{\frac{b^2}{2}}+\sqrt{\frac{b^2}{2}}+b=2\sqrt{\frac{b^2}{2}}+b=b\sqrt{2}+b=b\left(\sqrt{2}+1\right)\text{ cm.}$$



Sur Géogébra, on obtient les configurations suivantes pour b variant de 1 à 10.
Sur la 8ème courbe (pour $b=8$), on retrouve les valeurs obtenues par le calcul.

Exercice 4 :

Déterminer toutes les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ *telles que pour tout réel* x *:* $f(x)=\left(f(x)\right)^2$

Moins il y a d'informations, plus il faut décortiquer la seule donnée :

$$f(x)=\left(f(x)\right)^2 \Leftrightarrow \left(f(x)\right)^2-f(x)=0$$
$$\Leftrightarrow f(x)\left[f(x)-1\right]=0$$

Soit $f(x)=0$, soit $f(x)=1$.

Les fonctions constantes $f(x)=0$ et $f(x)=1$ vérifient les conditions demandées.

NB : on ne peut diviser au départ par $f(x)$ mais $f(x)$ est-il nul ?

Exercice 5 : Test d'entrée à Oxford

Soit la fonction $f(x)=x^2-5x+7$. *Quelles sont les coordonnées du minimum de* $f(x-2)$ *?*

On calcule $f(x-2)=(x-2)^2-5\times(x-2)+7$

$$=x^2-4x+4-5x+10+7$$
$$=x^2-9x+21$$

$a=1$ donc la courbe représentant la fonction $f(x-2)$ est « orientée vers le haut ».

L'abscisse de son sommet est donnée par :

$$\frac{-b}{2a}=\frac{-(-9)}{2\times1}=\frac{9}{2}$$

L'ordonnée de son sommet est donnée par :

$$\left(\frac{9}{2}\right)^2-9\times\frac{9}{2}+21=\frac{81}{4}-\frac{81}{2}+21=\frac{81}{4}-\frac{162}{4}+\frac{84}{4}=\frac{3}{4}$$

Les coordonnées du minimum de $f(x-2)$ sont $\left(\frac{9}{2};\frac{3}{4}\right)$.