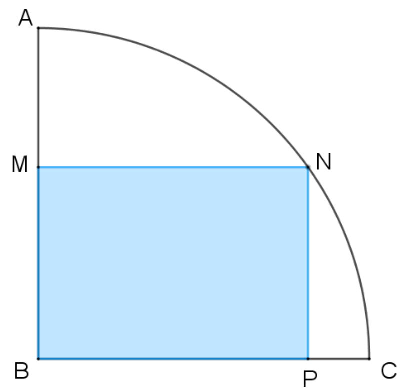
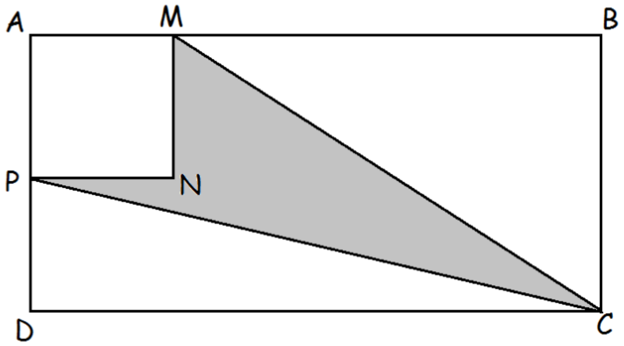
Problèmes d'optimisation en géométrie

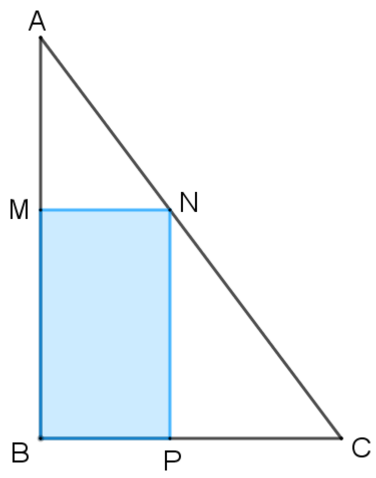
Exercice 1 : **Problème du rectangle dans le quart de disque :**
Comment placer le point P, si l'on veut que l'aire du rectangle BPNM soit maximale?



Exercice 2 :
On considère la figure ci-dessous, où ABCD est un rectangle tel que AB = 12 et BC = 6, M est un point mobile sur [AB], et les points mobiles N et P sont placés de telle sorte que AMNP est un carré, P étant un point du segment [AD].
Déterminer comment placer le point M si l'on veut que l'aire grisée soit la plus grande possible.
Expliquer la méthode employée.



Exercice 3 : **Problème du rectangle inscrit dans le triangle :**
Dans le triangle rectangle ABC, on donne AB = 8 cm et BC = 6 cm.
Déterminer la position du point M pour que l'aire du rectangle BPNM soit la plus grande possible.



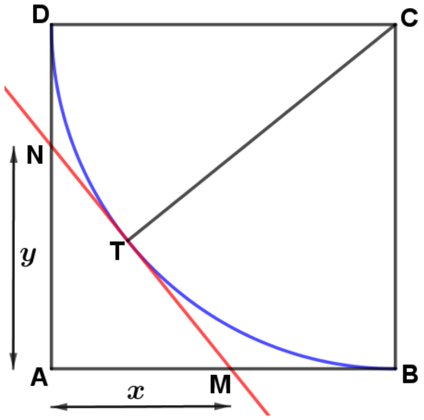
Exercice 4 :
On considère un demi-cercle de centre O et de rayon 10 cm. Soit $[AC]$ est un diamètre du cercle.

Un point K se déplace sur le rayon [OB] perpendiculaire en O au diamètre $[AC]$.

M et N sont les points d'intersection de la droite parallèle à $[AC]$ passant par K et du demi-cercle R.

Déterminer la position du point K pour que l'aire du triangle NOM soit la plus grande possible.

Exercice 5 :



Soit ABCD un carré de côté 1 et (Q) est le quart de cercle de centre C et passant par B et D.

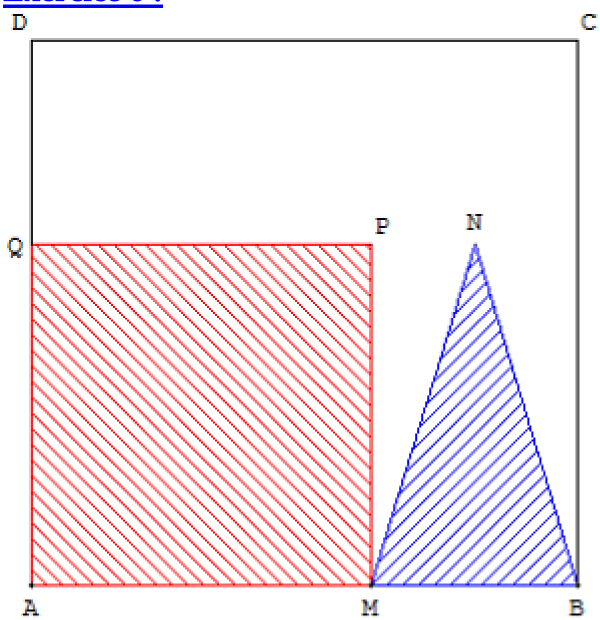
Soit M un point variable du segment $[AB]$ distinct de A et B.

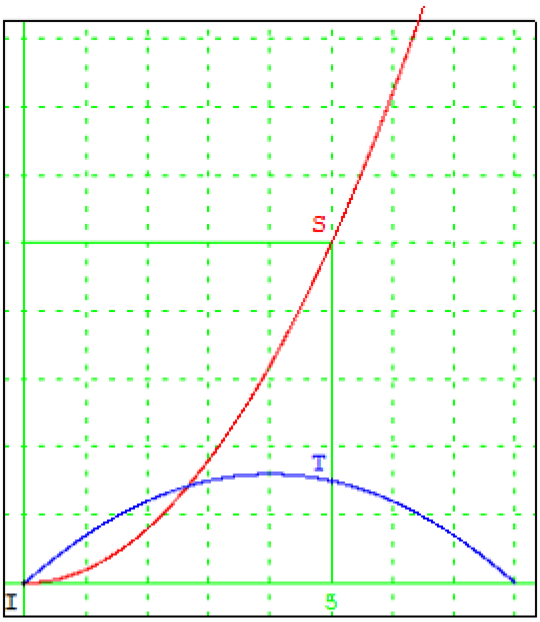
Par le point M on trace la tangente à (Q) qui coupe le côté $[AD]$ en N. Le point de contact de la tangente avec (Q) est nommé T.

On pose $AM = x$ et $AN = y$ avec $0 < x < 1$ et $0 < y < 1$.

1. a. Démontrer les deux expressions de MN :
$$\begin{cases} MN = \sqrt{x^2 + y^2} \\ MN = 2 - x - y \end{cases}.$$
   b. En déduire que $y = 2 + \dfrac{2}{x-2}$.
   c. En déduire la valeur de x pour laquelle la distance MN est minimale. Quelle est alors cette distance ?
   d. En déduire la valeur de x pour laquelle l'aire du triangle AMN est maximale. Quelle est alors cette aire ?

Exercice 6 :





Une même situation pour divers problèmes

Le carré ABCD a un côté de longueur 8 cm.
M est un point du segment [AB]. On dessine comme ci-dessus dans le carré ABCD un carré de côté [AM] un triangle isocèle de base [MB] et dont la hauteur a même mesure que le côté [AM] du carré.
On s'intéresse aux aires du carré, du triangle, du motif constitué par le carré et le triangle :

- Problème du type n°1 : On voudrait que le motif ait une aire égale à la moitié de celle du carré ABCD. Quelles dimensions faut-il donner au motif ?
- Problème du type n°1 : Est-il possible que l'aire du triangle soit égale à l'aire du carré ? (AM = 8/3)
- Problème du type n°2 : Est-il possible de faire en sorte que l'aire du triangle soit la plus grande possible ?

Si oui, préciser dans quel(s) cas ?

- Problème du type n°2 : Est-il possible de faire en sorte que l'aire du triangle soit plus grande que l'aire du carré ?
  Si oui, préciser dans quels cas c'est possible.
- Problème du type n°2 : Comment évolue l'aire du motif en fonction de AM ? En fonction de MB ?

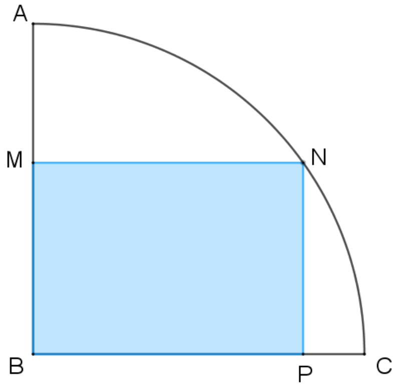
Exercice 7 :
On considère un rectangle ABCD tel que AB = 5 et BC = 3.
On place les points M, N et P respectivement sur les segments $]AB[$, $]BC[$ et $]AD[$ de telle sorte que les longueurs AM, BN et DP soient égales.
Il s'agit de déterminer la position du point M sur le segment $[AB]$ pour que l'aire du triangle MNP, inscrit dans le rectangle, soit minimale.

*M. Quet – **pas d'utilisation commerciale svp***

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. Quet

<u>Exercice 1</u> : Problème du rectangle dans le quart de disque :

Comment placer le point P, si l'on veut que l'aire du rectangle BPNM soit maximale?



Soit x la distance BP et R le rayon du cercle.
Le triangle BMP est rectangle en B donc d'après le théorème de Pythagore :

$$\mathrm{BM}^2+\mathrm{BP}^2=\mathrm{MP}^2$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{BM}^2+x^2=\mathrm{R}^2$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{BM}^2=\mathrm{R}^2-x^2$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{BM}=\sqrt{\mathrm{R}^2-x^2}$$

L'aire du rectangle est :

$$\mathrm{BM}\times\mathrm{BP}=x\times\sqrt{\mathrm{R}^2-x^2}$$

On définit la fonction f sur l'intervalle $[0;\mathrm{R}]$ par : $f(x)=x\times\sqrt{\mathrm{R}^2-x^2}$.

f est dérivable en tant que produit de fonctions dérivables :

$$f'(x)=1\times\sqrt{\mathrm{R}^2-x^2}+x\times\frac{-2x}{2\sqrt{\mathrm{R}^2-x^2}}=\sqrt{\mathrm{R}^2-x^2}-\frac{2x^2}{2\sqrt{\mathrm{R}^2-x^2}}=\frac{2\left(\mathrm{R}^2-x^2\right)}{2\sqrt{\mathrm{R}^2-x^2}}-\frac{2x^2}{2\sqrt{\mathrm{R}^2-x^2}}$$
$$=\frac{2\mathrm{R}^2-2x^2-2x^2}{2\sqrt{\mathrm{R}^2-x^2}}=\frac{2\mathrm{R}^2-4x^2}{2\sqrt{\mathrm{R}^2-x^2}}=\frac{2\left(\mathrm{R}^2-2x^2\right)}{2\sqrt{\mathrm{R}^2-x^2}}=\frac{2\left(\mathrm{R}+\sqrt{2}x\right)\left(\mathrm{R}-\sqrt{2}x\right)}{2\sqrt{\mathrm{R}^2-x^2}}$$

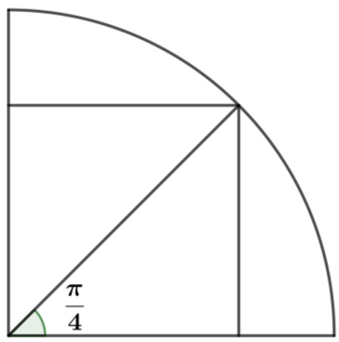
$x\in[0;\mathrm{R}]$ donc $\left(\mathrm{R}+\sqrt{2}x\right)\geq 0$ et $2\sqrt{\mathrm{R}^2-x^2}\geq 0$:

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow \mathrm{R}-\sqrt{2}x>0 \Leftrightarrow -\sqrt{2}x>-\mathrm{R} \Leftrightarrow x<\frac{-\mathrm{R}}{-\sqrt{2}} \Leftrightarrow x<\mathrm{R}\times\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Soit : $f'(x)>0 \Leftrightarrow x\in\left[0;\mathrm{R}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right[\Leftrightarrow x\in\left[0;\mathrm{R}\times\cos\frac{\pi}{4}\right[$ et f est croissante sur $\left[0;\mathrm{R}\times\cos\frac{\pi}{4}\right[$,

$f'(x)<0 \Leftrightarrow x\in\left[\mathrm{R}\times\cos\frac{\pi}{4};\mathrm{R}\right[$ et f est décroissante sur $\left[\mathrm{R}\times\cos\frac{\pi}{4};\mathrm{R}\right[$.

On obtient un carré :

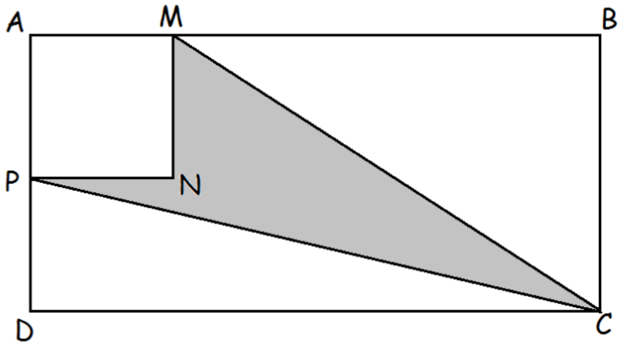


<u>Exercice 2 :</u>

On considère la figure ci-dessous, où ABCD est un rectangle tel que AB = 12 et BC = 6, M est un point mobile sur [AB], et les points mobiles N et P sont placés de telle sorte que AMNP est un carré, P étant un point du segment [AD].

Déterminer comment placer le point M si l'on veut que l'aire grisée soit la plus grande possible.

Expliquer la méthode employée.



Soit x la distance AM, ainsi :

- $\text{BM} = 12 - x$
- $\text{AP} = x$
- $\text{DP} = 6 - x$.

L'aire de la surface grisée est égale à :

$$\begin{aligned} A_{\text{ABCD}} - A_{\text{AMNP}} - A_{\text{BMC}} - A_{\text{CDP}} &= 12 \times 6 - x \times x - \frac{(12-x)\times 6}{2} - \frac{(6-x)\times 12}{2} \\ &= 72 - x^2 - 3(12-x) - 6(6-x) \\ &= 72 - x^2 - 36 + 3x - 36 + 6x \\ &= -x^2 + 9x \end{aligned}$$

On définit la fonction f sur l'intervalle $[0;6]$ par : $f(x) = -x^2 + 9x$.

f est dérivable en tant que fonction polynômiale :

$$f'(x) = -2x + 9$$

Ainsi :

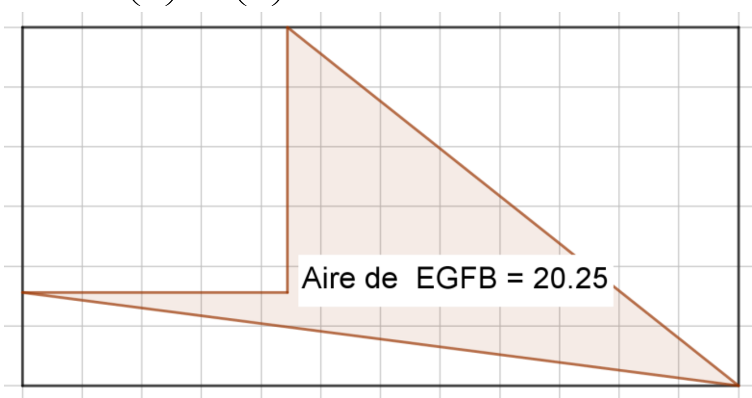
$$f'(x) > 0 \iff -2x + 9 > 0 \iff -2x > -9 \iff x < \frac{-9}{-2} \iff x < \frac{9}{2}.$$

Si $x \in \left[0; \frac{9}{2}\right]$: $f'(x) > 0$ et f est croissante ,

Si $x \in \left[\frac{9}{2}; 6\right]$: $f'(x) < 0$ et f est décroissante.

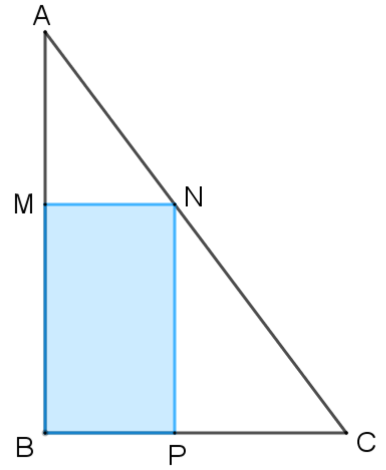
La fonction f passe par un maximum en $x = \frac{9}{2}$

L'aire maximale est $f\left(\frac{9}{2}\right) = -\left(\frac{9}{2}\right)^2 + 9 \times \frac{9}{2} = -\frac{81}{4} + \frac{81}{2} = \frac{81}{4} \text{cm}^2$.



Exercice 3 : **Problème du rectangle inscrit dans le triangle:**

Dans le triangle rectangle ABC, on donne AB = 8 cm et BC = 6 cm.
Déterminer la position du point M pour que l'aire du rectangle BPNM soit la plus grande possible.



Soit x la distance BM, ainsi :

- $\mathrm{AM} = 8 - x$
- $\mathrm{NP} = x$

Il faut en priorité déterminer la longueur BP ou MN.
→le théorème de Thalès va être utile :
Les droites (BM) et (CN) se coupent en A et $(\mathrm{MN}) // (\mathrm{BC})$.
D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{BC}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{8-x}{8} = \frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{MN}}{6}$$

$$\Leftrightarrow 8 \times \mathrm{MN} = 6 \times (8 - x)$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{MN} = \frac{6 \times (8-x)}{8} = \frac{3(8-x)}{4} = \frac{24-3x}{4}$$

Ainsi, l'aire du rectangle BPNM est :

$$\mathrm{BM} \times \mathrm{BP} = x \times \frac{3(8-x)}{4} = x \times \frac{24-3x}{4} = \frac{24x - 3x^2}{4}$$

On définit la fonction f sur l'intervalle $[0;8]$ par : $f(x) = \frac{24x-3x^2}{4} = 6x - \frac{3x^2}{4}$.

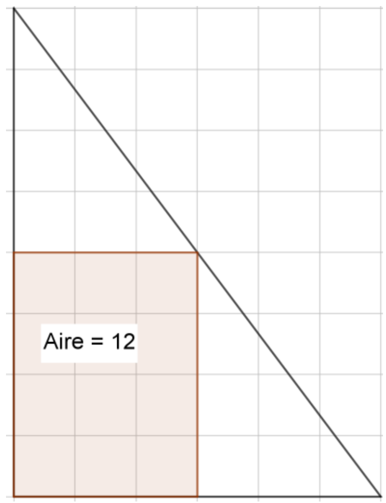
f est dérivable en tant que fonction polynômiale :

$$f'(x) = 6 - \frac{3}{4} \times 2x = 6 - \frac{3}{2}x$$

Ainsi : $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 6 - \frac{3}{2}x > 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}x > -6 \Leftrightarrow x < -6 \times \left(-\frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow x < 4$.

Si $x \in [0;4]$: $f'(x) > 0$ et f est croissante ,
Si $x \in [4;8]$: $f'(x) < 0$ et f est décroissante.
La fonction f passe par un maximum en $x = 4$

L'aire maximale est $f(4) = \frac{24 \times 4 - 3 \times 4^2}{4} = \frac{96 - 3 \times 16}{4} = \frac{96-48}{4} = \frac{48}{4} = 12\,\mathrm{cm}^2$.



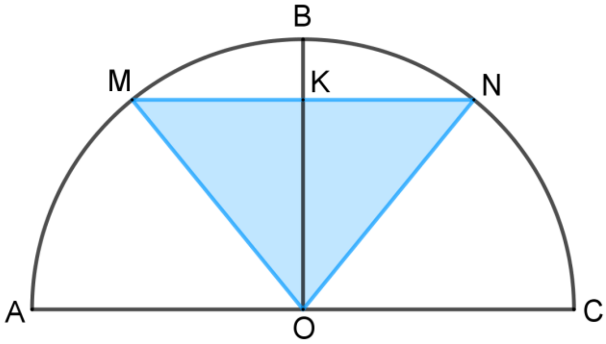
Exercice 4 :

On considère un demi-cercle de centre O et de rayon 10 cm. Soit $[AC]$ est un diamètre de R.

Un point K se déplace sur le rayon [OB] perpendiculaire en O au diamètre $[AC]$.

M et N sont les points d'intersection de la droite parallèle à $[AC]$ passant par K et du demi-cercle.

Déterminer la position du point K pour que l'aire du triangle NOM soit la plus grande possible.



$[OM]$ et $[ON]$ sont des rayons donc $OM = ON = R = 10$.

Soit x la distance OK, ainsi dans le triangle rectangle OKM, en utilisant le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} & OK^2 + KM^2 = OM^2 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 + KM^2 = 10^2 \\ \Leftrightarrow\ & KM^2 = 100 - x^2 \\ \Leftrightarrow\ & KM = \sqrt{100 - x^2} \end{aligned}$$

Et par symétrie : $MN = 2 \times KM = 2\sqrt{100 - x^2}$

L'aire du triangle MNO est : $\dfrac{MN \times OK}{2} = \dfrac{x \times 2\sqrt{100-x^2}}{2} = x \times \sqrt{100 - x^2}$

On définit la fonction f sur l'intervalle $[0;10]$ par : $f(x) = x \times \sqrt{100 - x^2}$.

f est dérivable en tant que produit de fonctions dérivables :

$$f'(x) = 1 \times \sqrt{100-x^2} + x \times \frac{-2x}{2\sqrt{R^2 - x^2}} = \sqrt{100-x^2} - \frac{2x^2}{2\sqrt{100-x^2}} = \frac{2(100-x^2)}{2\sqrt{100-x^2}} - \frac{2x^2}{2\sqrt{100-x^2}}$$

$$= \frac{2\times100 - 2x^2 - 2x^2}{2\sqrt{100-x^2}} = \frac{2\times100 - 4x^2}{2\sqrt{100-x^2}} = \frac{2(100-2x^2)}{2\sqrt{100-x^2}} = \frac{2(10+\sqrt{2}x)(10-\sqrt{2}x)}{2\sqrt{100-x^2}}$$

$x \in [0;10]$ donc $(10 + \sqrt{2}x) \geq 0$ et $2\sqrt{100-x^2} \geq 0$:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 10 - \sqrt{2}x > 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2}x > -10 \Leftrightarrow x < \frac{-10}{-\sqrt{2}} \Leftrightarrow x < 10 \times \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Soit : $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left[0; 10 \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right[\Leftrightarrow x \in \left[0; 10\times\cos\frac{\pi}{4}\right[$ et f est croissante sur $\left[0;10\times\cos\frac{\pi}{4}\right[$,

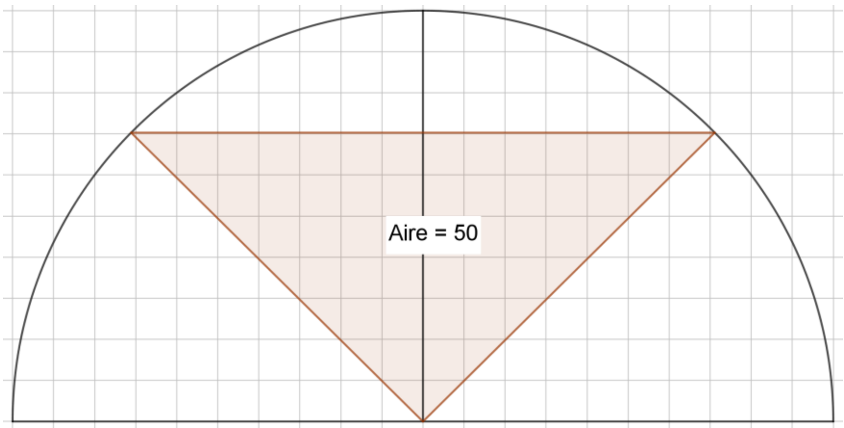
$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]10\times\cos\frac{\pi}{4};10\right[$ et f est décroissante sur $\left]10\times\cos\frac{\pi}{4};10\right[$.

Si $x \in \left[0;5\sqrt{2}\right]$: $f'(x) > 0$ et f est croissante ,

Si $x \in \left[5\sqrt{2};10\right]$: $f'(x) < 0$ et f est décroissante.

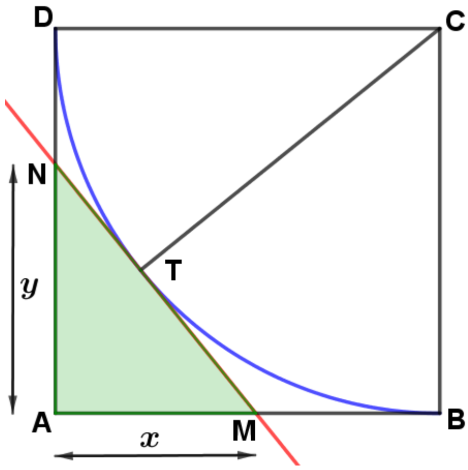
La fonction f passe par un maximum en $x = 5\sqrt{2}$

L'aire maximale est $f(5\sqrt{2}) = 5\sqrt{2} \times \sqrt{100 - (5\sqrt{2})^2} = 5\sqrt{2} \times \sqrt{100 - 25\times2} = 5\sqrt{2} \times \sqrt{50} = 50\,\text{cm}^2$.



Exercice 5 :

Soit ABCD un carré de côté 1 et (Q) est le quart de cercle de centre C et passant par B et D.
Soit M un point variable du segment $[AB]$ distinct de A et B.
Par le point M on trace la tangente à (Q) qui coupe le côté $[AD]$ en N. Le point de contact de la tangente avec (Q) est nommé T.
On pose $AM = x$ et $AN = y$ avec $0 < x < 1$ et $0 < y < 1$.



1. a. *Démontrer les deux expressions de MN :*

$$\begin{cases} MN = \sqrt{x^2+y^2} \\ MN = 2-x-y \end{cases}.$$

Le triangle AMN est rectangle en A, avec Pythagore :

$$MN = \sqrt{x^2+y^2}$$

En appliquant le théorème de Pythagore dans les triangles rectangles CTN et CDN :

$$CN^2 = CD^2 + DN^2 = 1 + DN^2 \quad \text{et} \quad CN^2 = CT^2 + TN^2 = 1 + TN^2$$

Donc : $DN = TN$

En appliquant le théorème de Pythagore dans les triangles rectangles BCM et CTM :

$$CM^2 = BC^2 + BM^2 = 1 + BM^2 \quad \text{et} \quad CM^2 = CT^2 + TM^2 = 1 + TM^2$$

Donc : $BM = TM$.

On en déduit :

$$MN = MT + TN = BM + DN = (1-x) + (1-y) = 2 - x - y.$$

b. *En déduire que $y = 2 + \dfrac{2}{x-2}$.*

D'après ce qui précède :

$$\begin{cases} MN = \sqrt{x^2+y^2} \\ MN = 2-x-y \end{cases} \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = (2-x-y)^2$$

$$\Leftrightarrow \; x^2 + y^2 = 4 + x^2 + y^2 - 4x - 4y + 2xy$$

$$\Leftrightarrow \; 2xy - 4y = 4x - 4$$

$$\Leftrightarrow \; y = \frac{4x-4}{2x-4} = \frac{4x-8+4}{2x-4} = \frac{4x-8}{2x-4} + \frac{4}{2x-4} = \frac{2(2x-4)}{2x-4} + \frac{4}{2(x-2)} = 2 + \frac{2}{x-2}$$

c. *En déduire la valeur de x pour laquelle la distance MN est minimale.*
Quelle est alors cette distance ?

On définit une fonction f sur l'intervalle $[0;1]$ par :

$$f(x)=2-x-y=2-x-\left(2+\frac{2}{x-2}\right)=-x-\frac{2}{x-2}$$

$$f'(x)=-1-\frac{2\times(-1)}{(x-2)^2}=\frac{-(x-2)^2}{(x-2)^2}+\frac{2}{(x-2)^2}=\frac{-x^2+4x-2}{(x-2)^2}$$

Discriminant : $\Delta=4^2-4\times(-1)\times(-2)=16-8=8$ donc deux solutions :

$$x_1=\frac{-4-\sqrt{8}}{2\times(-1)}=\frac{-4-2\sqrt{2}}{-2}=2+\sqrt{2} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-4+\sqrt{8}}{2\times(-1)}=\frac{-4+2\sqrt{2}}{-2}=2-\sqrt{2}$$

$a=-1$ donc la parabole est orientée vers le bas :

Si $x\in\left]2-\sqrt{2};2+\sqrt{2}\right[$: $f'(x)>0$

On en déduit le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0;1]$:

x	0		$2-\sqrt{2}$		1
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
f	1	$\searrow$	$-2+2\sqrt{2}$	$\nearrow$	1

Avec : $f(0)=-0-\dfrac{2}{0-2}=1$, $f(1)=-1-\dfrac{2}{1-2}=-1+2=1$

$$f\left(2-\sqrt{2}\right)=-\left(2-\sqrt{2}\right)-\frac{2}{2-\sqrt{2}-2}=-2+\sqrt{2}+\frac{2}{\sqrt{2}}=-2+2\sqrt{2}$$

La distance MN est minimale pour $x=2-\sqrt{2}$.

Cette distance minimale est : $-2+2\sqrt{2}$

d. *En déduire la valeur de x pour laquelle l'aire du triangle AMN est maximale. Quelle est alors cette aire ?*

Première méthode (rapide) :

$$A_{\text{AMN}}=A_{\text{ABCD}}-A_{\text{CBMT}}-A_{\text{CDNT}}=A_{\text{ABCD}}-2A_{\text{CBM}}-2A_{\text{CDN}}$$

$$=1\times1-2\times\frac{1\times\text{BM}}{2}-2\times\frac{1\times\text{DN}}{2}=1-\text{BM}-\text{DN}=1-\text{MN}$$

L'aire du triangle AMN est donc maximale lorsque la longueur MN est minimale, c'est-à-dire :

pour : $x=2-\sqrt{2}$, $\text{MN}=-2+2\sqrt{2}$.

Cette aire maximale est :

$$A_{\text{AMN}}=1-\left(-2+2\sqrt{2}\right)=3-2\sqrt{2}$$

Deuxième méthode (on définit une fonction) :

On définit une fonction g sur l'intervalle $[0;1]$ par :

$$g(x)=\frac{x\times y}{2}=\frac{x\times\left(2+\dfrac{2}{x-2}\right)}{2}=x+\frac{x}{x-2}$$

$$g'(x)=1+\frac{1(x-2)-x\times1}{(x-2)^2}=\frac{(x-2)^2}{(x-2)^2}+\frac{-2}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x+2}{(x-2)^2}=-f'(x)$$

De ce qui précède :

Si $x\in\left]2-\sqrt{2};2+\sqrt{2}\right[$: $g'(x)<0$

On en déduit le tableau de variation de la fonction g sur l'intervalle $[0;1]$:

x	0		$2-\sqrt{2}$		1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	1	$\nearrow$	$3-2\sqrt{2}$	$\searrow$	1

Avec : $g(0)=0+\dfrac{0}{0-2}=0$, $g(1)=1+\dfrac{1}{1-2}=0$

$$g\left(2-\sqrt{2}\right)=2-\sqrt{2}+\frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}-2}=2-\sqrt{2}+\frac{2-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}}=2-\sqrt{2}-\sqrt{2}+1=3-2\sqrt{2}$$