Exercices à prise d'initiative sur l'exponentielle

Exercice 1 :

Soit C la courbe représentative de la fonction exponentielle dans un repère orthonormal d'origine O.
Pour quel(s) point(s) M de la courbe C, la distance OM est-elle minimale ?
Proposer ensuite une solution en programmation avec python.

Exercice 2 :

Existe-t-il une/des tangente(s) communes (s) aux courbes C et C' d'équations respectives : $y = e^x$ et $y' = -e^{-x-1}$.
Si oui, déterminer cette/ces équation(s).

Exercice 3 :

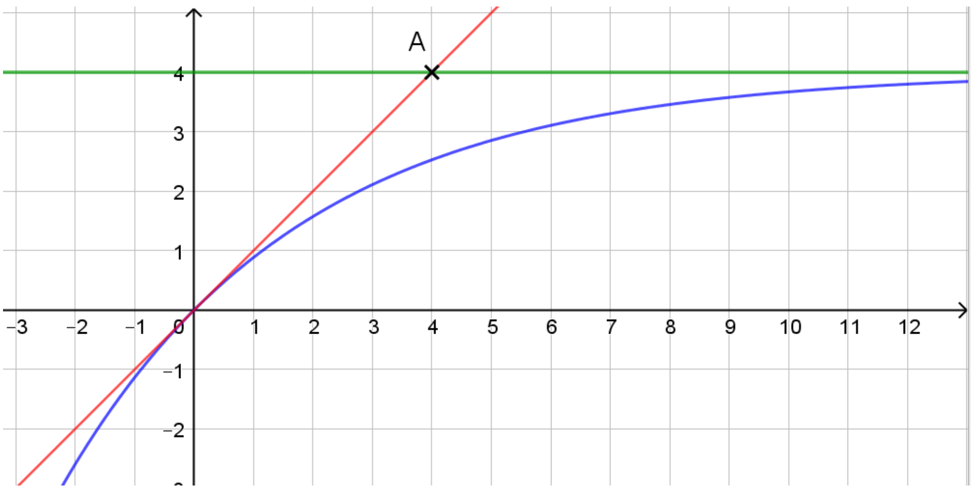
Une fonction f est définie sur $[-2;3]$ par : $f(x) = (ax+b)e^{kx}$ avec a, b et k réels, k étant strictement positif.
La courbe représentative de la fonction admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point de C d'abscisse -1 et une tangente parallèle à la droite $d : y = -5x$ au point $\mathrm{A}(0;10)$.
Déterminer f.

Exercice 4 :

Soit C la courbe d'équation $y = e^x - 1$, x réel dans le plan muni d'un repère orthonormé.
Soient A le point de C d'abscisse 1, M un point de C d'abscisse x, où $x \in [0;1]$. Où placer M pour que l'aire du triangle OAM soit maximale ?

Exercice 5 :

La courbe C a pour équation $y = a\left(1 - e^{bx}\right)$ avec a et b des réels. Le point A a pour coordonnées $(4;4)$ et la droite (OA) est tangente à C en O.
Trouvez a et b.



Exercice 6 :

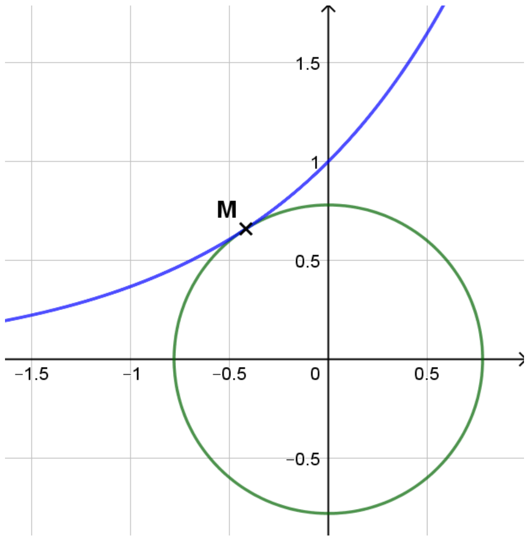
Soit n un entier strictement positif.
Soit la fonction f_n définie sur l'ensemble des nombres réels par : $f_n(x) = 2ne^x - e^{2x}$
et C_n sa représentation graphique dans un repère orthonormé.
On admet que f_n est dérivable et que C_n admet une tangente horizontale en un unique point S_n.
Indiquer si la proposition suivante est vraie ou fausse en justifiant votre réponse.

VRAI ou FAUX : Pour tout entier strictement positif n, l'ordonnée du point S_n est n^2.

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. Quet

Exercice 1 :

Soit C la courbe représentative de la fonction exponentielle dans un repère orthonormal d'origine O.
Pour quel(s) point(s) M de la courbe C, la distance OM est-elle minimale ?
Proposer ensuite une solution en programmation avec python.



En utilisant Geogebra, il semblerait qu'il n'y ait qu'une seule solution :

Les coordonnées du point M sont $\left(x;e^x\right)$ donc la distance OM mesure :

$$\mathrm{OM}=\sqrt{x^2+\left(e^x\right)^2}=\sqrt{x^2+e^{2x}}\ .$$

Il sera plus simple d'étudier la distance $\mathrm{OM}^2=x^2+e^{2x}$.

On pose pour tout réel x strictement positif la fonction f définie par :

$$f\left(x\right)=x^2+e^{2x}.$$

Cette fonction est dérivable comme somme de fonctions polynomiale et carré d'exponentielle :

$$f'\left(x\right)=2x+2e^{2x}$$

$$f'\left(x\right)>0 \;\Leftrightarrow\; 2x+2e^{2x}>0 \;\Leftrightarrow\; x+e^{2x}>0$$

On pose pour tout réel x strictement positif la fonction g définie par :

$$g\left(x\right)=x+e^{2x}.$$

Cette fonction est dérivable comme somme de fonctions polynomiale et exponentielle :

$$g'\left(x\right)=1+2e^{2x}$$

$g'\left(x\right)>0 \;\Leftrightarrow\; 1+2e^{2x}>0 \;\Leftrightarrow\; e^{2x}>-\dfrac{1}{2}$, ce qui est vrai pour tout réel x.

Cette dérivée est strictement positive donc la fonction g est strictement croissante et continue.

Or $\quad g\left(-1\right)=-1+e^{-2}<0$ et $g\left(-1\right)=0+e^0=1>0$

Ainsi $g\left(-1\right)<0$ et $g\left(0\right)>0$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $\alpha\in\left]-1;0\right[$ tel que $g\left(\alpha\right)=0$.

On trouve $\alpha\simeq-0,426$.

Ainsi, sur l'intervalle $\left]-\infty;-0,426\right[$, la fonction g est négative donc $f'\left(x\right)<0$ et la fonction f est décroissante

Ainsi, sur l'intervalle $\left]-0,426;+\infty\right[$, la fonction g est positive donc $f'\left(x\right)>0$ et la fonction f est croissante.

Le minimum de la fonction f est : $f\left(-0,426\right)\simeq0,608$ d'où une distance OM minimale égale à :

$$\sqrt{0,608}\simeq0,780\,.$$

Les coordonnées du point M recherché sont : $\left(-0,426;e^{-0,426}\right)$ soit environ : $\left(-0,426;0,608\right)$.

Concernant la valeur α, on remarque que :

$$g\left(\alpha\right)=0 \;\Leftrightarrow\; \alpha+e^{2\alpha}=0 \;\Leftrightarrow\; e^{2\alpha}=-\alpha$$

Donc : $\quad f\left(\alpha\right)=\alpha^2+e^{2\alpha}=\alpha^2-\alpha=\alpha\left(\alpha-1\right)$

Programmation en python :

```
from math import exp
def distance_OM(x):
    return (x**2+exp(2*x))**0.5
D = 10
x = -1
for i in range(1,1001):
```

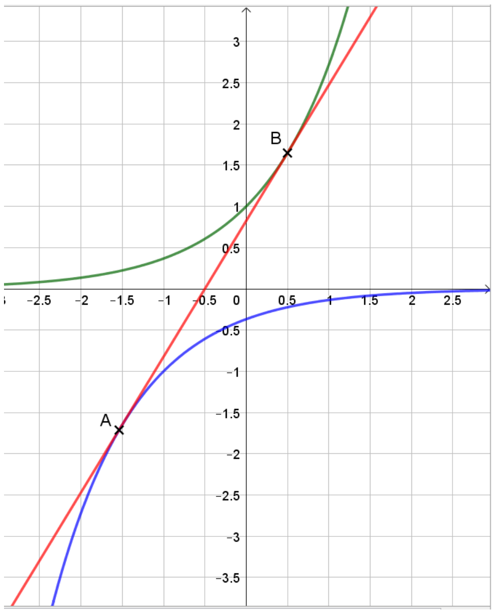
```
        x += 1/1000
        dist = distance_OM(x)
        if dist < D :
            D = dist
            a = x
    print(a,D)
```

On obtient :

-0.42599999999999995 0.7797672449808926

Exercice 2 :

Existe-t-il une/des tangente(s) communes (s) aux courbes C et C' d'équations respectives : $y=e^{x}$ *et* $y'=-e^{-x-1}$*. Si oui, déterminer cette/ces équation(s).*



Avec la calculatrice ou geogebra, on voit qu'il existe une solution. L'équation de la tangente à la courbe représentant la fonction $f(x)=e^{x}$ en tout point d'abscisse $x=a$ est :

$$\begin{aligned} y &= f'(a)\times(x-a)+f(a) \\ &= e^{a}(x-a)+e^{a} \\ &= e^{a}\times x+e^{a}(1-a) \end{aligned}$$

L'équation de la tangente à la courbe représentant la fonction $g(x)=-e^{-x-1}$ en tout point d'abscisse $x=b$ est, sachant que $g'(x)=e^{-x-1}$:

$$\begin{aligned} y &= g'(b)\times(x-b)+g(b) \\ &= e^{-b-1}(x-b)-e^{-b-1} \\ &= e^{-b-1}\times x+e^{-b-1}(-b-1) \end{aligned}$$

Si ces deux tangentes sont égales, elles ont même coefficient directeur et même ordonnée à l'origine :

$$\begin{cases} e^{a}=e^{-b-1} \\ e^{a}(1-a)=e^{-b-1}(-b-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-b-1 \\ e^{-b-1}(1-(-b-1))=e^{-b-1}(-b-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-b-1 \\ 1+b+1=-b-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-b-1 \\ b+2=-b-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-b-1 \\ b+b=-1-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-b-1 \\ 2b=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\left(-\dfrac{3}{2}\right)-1=\dfrac{3}{2}-\dfrac{2}{2}=\dfrac{1}{2} \\ b=-\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Si $a=\frac{1}{2}$, on obtient l'équation $y=e^{a}\times x+e^{a}(1-a)=e^{\frac{1}{2}}\times x+e^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{2}\right)=e^{\frac{1}{2}}\times x+\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}$

Si $b=-\frac{3}{2}$, on obtient l'équation $y=e^{-\left(-\frac{3}{2}\right)-1}\times x+e^{-\left(-\frac{3}{2}\right)-1}\left(-\left(-\frac{3}{2}\right)-1\right)=e^{\frac{1}{2}}\times x+e^{\frac{1}{2}}\left(\frac{3}{2}-1\right)=e^{\frac{1}{2}}\times x+\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}$.

Exercice 3 :

Une fonction f *est définie sur* $[-2;3]$ *par :* $f(x)=(ax+b)e^{kx}$ *avec a, b et k réels, k étant strictement positif. La courbe représentative de la fonction admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point de C d'abscisse* -1 *et une tangente parallèle à la droite* $d:y=-5x$ *au point* $\mathrm{A}(0;10)$*. Déterminer* f *.*

Il faut identifier 3 critères :

- Une tangente horizontale au point d'abscisse $x=-1$ donc $f'(-1)=0$,
- Une tangente parallèle à la droite d'équation $y=-5x$ au point d'abscisse $x=0$ donc $f'(0)=-5$,
- La courbe C passe par le point $\mathrm{A}(0;10)$ donc $f(0)=10$.

La fonction f est dérivable en tant que composée de fonctions polynomiales et exponentielle :

$$f'(x)=a\times e^{kx}+(ax+b)\times ke^{kx}=e^{kx}\left[a+k(ax+b)\right].$$

Ainsi :

$$\begin{cases} e^{k\times(-1)}\left[a+k\left(a\times(-1)+b\right)\right]=0 \\ e^{k\times 0}\left[a+k(a\times 0+b)\right]=-5 \\ (a\times 0+b)e^{k\times 0}=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{-k}\left[a+k(-a+b)\right]=0 \\ 1\times[a+kb]=-5 \\ b=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+k(-a+10)=0 \\ a+10k=-5 \\ b=10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (-5-10k)+k\left(-(-5-10k)+10\right)=0 \\ a=-5-10k \\ b=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5-10k+k(5+10k+10)=0 \\ a=-5-10k \\ b=10 \end{cases}$$

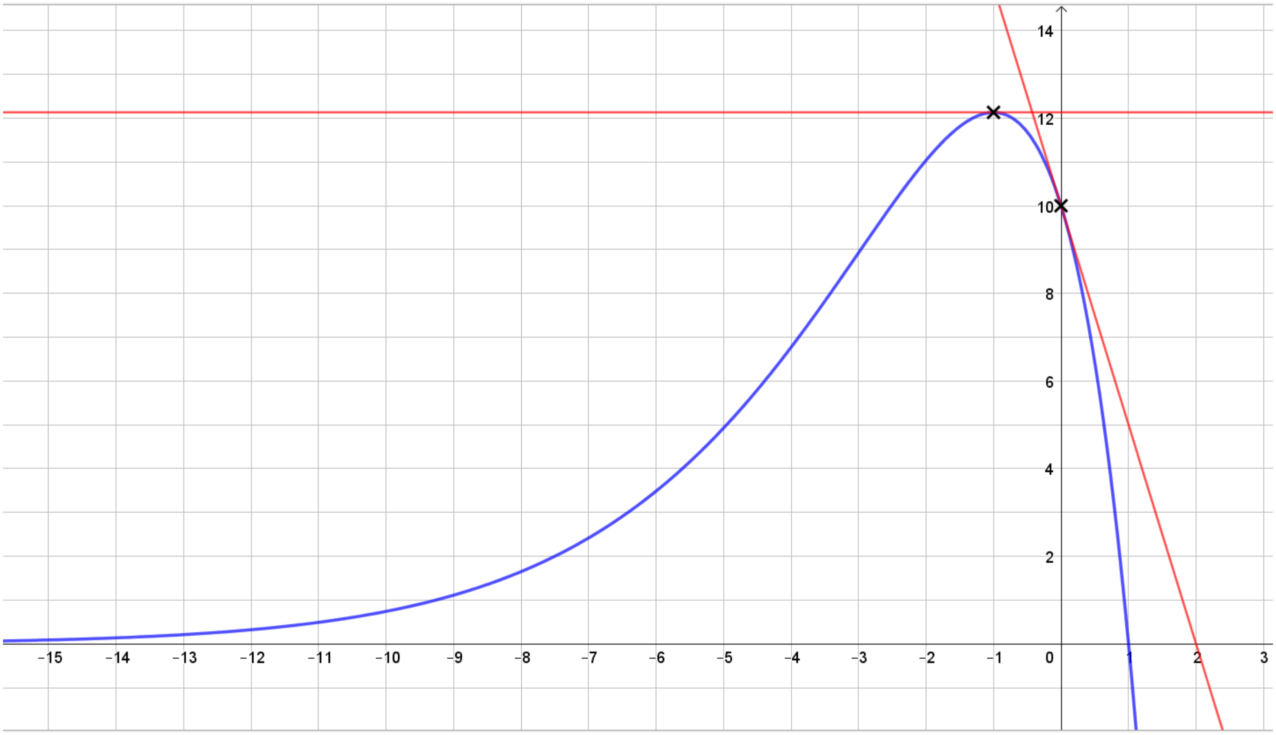
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5-10k+15k+10k^2=0 \\ a=-5-10k \\ b=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10k^2+5k-5=0 \\ a=-5-10k \\ b=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k^2+k-1=0 \\ a=-5-10k \\ b=10 \end{cases}$$

Discriminant : $\Delta=1^2-4\times 2\times(-1)=9=3^2$ donc $k_1=\dfrac{-1-3}{2\times 2}=\dfrac{-4}{4}=-1$ et $k_2=\dfrac{-1+3}{2\times 2}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$.

k est strictement positif donc on retient $k=\dfrac{1}{2}$.

Ainsi : $a=-5-10k=-5-10\times\dfrac{1}{2}=-5-5=-10$

Et $f(x)=(-10x+10)e^{\frac{1}{2}x}$



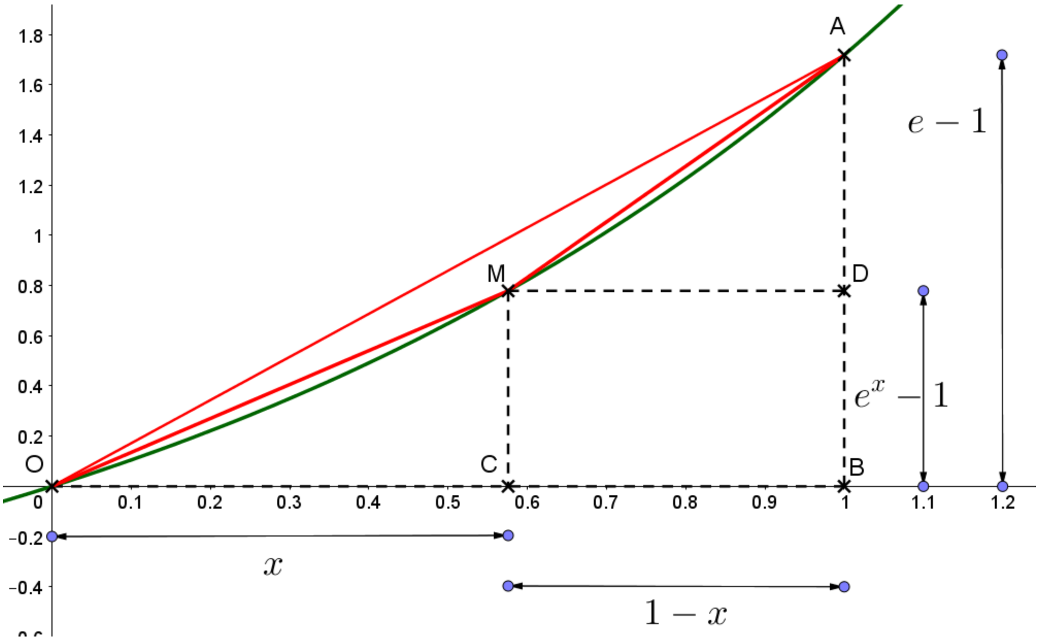
Exercice 4 :

Soit C la courbe d'équation $y=e^x-1$, *x réel dans le plan muni d'un repère orthonormé.*

Soient A le point de C d'abscisse 1, M un point de C d'abscisse x, où $x\in[0;1]$. *Où placer M pour que l'aire du triangle OAM soit maximale ?*

Le point A a pour coordonnées $\mathrm{A}(1;e-1)$.

Le point M a pour coordonnées $\mathrm{M}(x;e^x-1)$.



$$\mathcal{A}_{\mathrm{OAM}}=\mathcal{A}_{\mathrm{OAB}}-\mathcal{A}_{\mathrm{OCM}}-\mathcal{A}_{\mathrm{MCBD}}-\mathcal{A}_{\mathrm{MDA}}$$

$$=\frac{1\times(e-1)}{2}-\frac{x\times(e^x-1)}{2}-(1-x)\times(e^x-1)-\frac{(1-x)\times\left[(e-1)-(e^x-1)\right]}{2}$$

$$=\frac{e-1}{2}-\frac{xe^x-x}{2}-\frac{2}{2}\left(e^x-1-xe^x+x\right)-\frac{(1-x)\times\left[e-e^x\right]}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left[e-1-\left(xe^x-x\right)-2\left(e^x-1-xe^x+x\right)-\left(e-e^x-xe+xe^x\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[e-1-xe^x+x-2e^x+2+2xe^x-2x-e+e^x+xe-xe^x\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-x-e^x+xe\right)$$

On pose $f(x)=\frac{1}{2}\left(1-x-e^x+xe\right)$.

La fonction f est dérivable en tant que composée de fonctions polynomiales et exponentielle :

$\forall x\in[0;1]$: $f'(x)=\frac{1}{2}\left(-1-e^x+e\right)$.

$f'(x)>0 \iff -1-e^x+e>0 \iff -e^x>1-e \iff e^x<e-1 \iff x<\ln(e-1)$

x	0		$\ln(e-1)$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$		$\searrow$	$e-1$

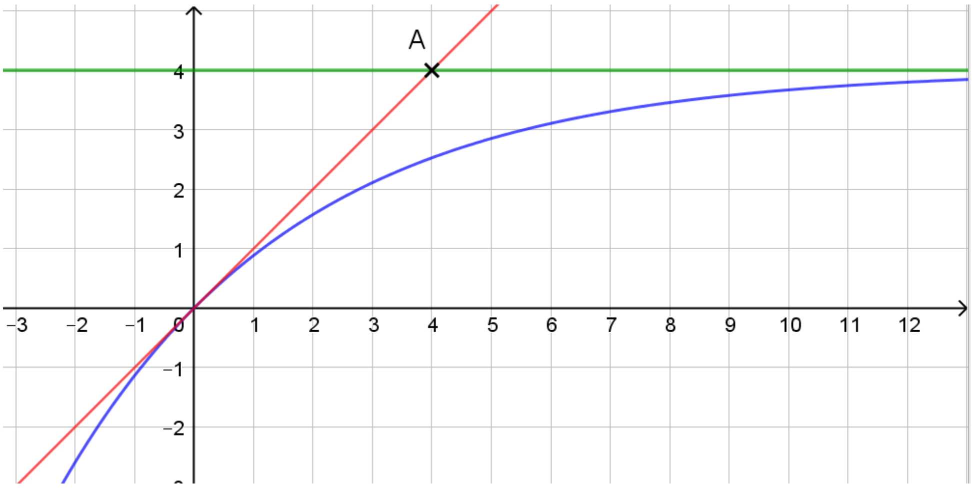
$$f\left(\ln(e-1)\right)=\frac{1}{2}\left(1-\ln(e-1)-e^{\ln(e-1)}+e\times\ln(e-1)\right)=\frac{1}{2}\left(1-\ln(e-1)-(e-1)+e\times\ln(e-1)\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(2-e+(e-1)\times\ln(e-1)\right).$$

M doit être au point d'abscisse : $x=\ln(e-1)$.

Exercice 5 :

La courbe C a pour équation $y=a\left(1-e^{bx}\right)$ *avec a et b des réels. Le point A a pour coordonnées* $(4;4)$ *et la droite* (OA) *est tangente à C en O.*

Trouvez a et b.



Le point A a pour coordonnées $(4;4)$ donc le coefficient directeur de la droite (OA) est égal à 1.

On définit la fonction f pour tous réels *a*, *b* et *x* par :

$$f(x)=a\left(1-e^{bx}\right).$$

f est dérivable en tant composée de fonction exponentielle et de fonction polynomiale :

$$f'(x)=-abe^{bx}$$

Ainsi :

$$\begin{cases} f(0)=0 \\ f'(0)=1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\left(1-e^{b\times 0}\right)=0 \\ -abe^{b\times 0}=1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} a\left(1-e^{bx}\right)=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\times 0=0 \\ -ab=1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} a\left(1-e^{bx}\right)=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-\dfrac{1}{a} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} a\left(1-e^{bx}\right)=4 \end{cases}$$

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} a\left(1-e^{-\frac{1}{a}x}\right)=4$.

On pose $\text{X}=-\frac{1}{a}x$, en sachant que $\lim\limits_{\text{X}\to+\infty} e^{\text{X}}=+\infty$ et $\lim\limits_{\text{X}\to-\infty} e^{\text{X}}=0$, *a* étant un réel constant, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{a}x}=0$$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} a\left(1-e^{-\frac{1}{a}x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} a=4$.

On obtient : $a=4$ et $b=-\frac{1}{a}=-\frac{1}{4}$

Exercice 6 :

Soit n un entier strictement positif.

Soit la fonction f_n définie sur l'ensemble des nombres réels par : $f_n(x) = 2ne^x - e^{2x}$

et C_n sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

On admet que f_n est dérivable et que C_n admet une tangente horizontale en un unique point S_n.

Indiquer si la proposition suivante est vraie ou fausse en justifiant votre réponse.

VRAI ou FAUX : Pour tout entier strictement positif n, l'ordonnée du point S_n est n^2.

La pente de la tangente est égale à la valeur de la dérivée.
Une tangente horizontale est associée à une dérivée nulle.
La fonction *f* est dérivable en tant que différence de fonctions exponentielles.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x) = 2ne^x - 2e^{2x} = 2\left(ne^x - e^{2x}\right) = 2\left(ne^x - e^x \times e^x\right) = 2e^x\left(n - e^x\right)$

L'exponentielle étant strictement positive, on a :

$$f_n'(x) = 0 \iff n - e^x = 0 \iff e^x = n \iff x = \ln(n).$$

L'abscisse du point admettant une tangente horizontale est $\ln(n)$.

Son ordonnée est :

$$f_n(\ln(n)) = 2ne^{\ln(n)} - e^{2\times\ln(n)} = 2n \times n - e^{\ln\left(n^2\right)} = 2n^2 - n^2 = n^2$$

La proposition est vraie.