Contrôle sur la convexité

Exercice 1

6 pts (1-1-1-1-1-1)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[2;8]$ par : $f(x)=\dfrac{-x^2+10x-16}{x^2}$.

On appelle (C) sa courbe représentative dans un repère.

1. a) Montrer que pour tout réel de l'intervalle $[2;8]$, on a : $f'(x)=\dfrac{-10x+32}{x^3}$

   b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[2;8]$.

   c) En déduire le tableau de variations de f sur l'intervalle $[2;8]$

2. On appelle f'' la dérivée seconde de f sur $[2;8]$.

   a) Montrer que pour tout réel de l'intervalle $[2;8]$, on a : $f''(x)=\dfrac{20x-96}{x^4}$.

   b) Etudier la convexité de f sur $[2;8]$.

   c) La courbe (C) possède-t-elle des points d'inflexion ? Si oui, déterminer leurs coordonnées.

Exercice 2

10 pts (2-1,5-1-1,5-1-2-1)

1) Soit f la fonction définie *sur* $\mathbb{R}$ par $f(x)=(3-2x)e^{2x}+1$.

   a) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

   b) Etudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variation.

   c) Etudier la convexité de la fonction f.

2) Soit g la fonction définie sur $]-1;4]$ par $g(x)=-x^3+3x^2-1$.

   a) Etudier les variations de la fonction g et dresser son tableau de variation.

   b) Déterminer une équation de la tangente en 1 à la courbe C_g.

   c) Etudier la convexité de g et déterminer les éventuels points d'inflexion de la courbe.

   d) En déduire le signe de la fonction h définie sur $]-1;4]$ par $h(x)=g(x)-(3x-2)$.

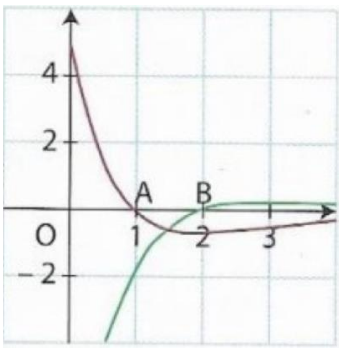
   On justifiera correctement la réponse.

Exercice 3 :

4 pts (2-2)

f est une fonction deux fois dérivable sur $[0;4]$. Voici la courbe représentative C' de sa fonction dérivée f' et la courbe représentative C'' de sa fonction dérivée seconde f''.

$\mathrm{A}(1;0)$ est un point appartenant à l'une de ces deux courbes et $\mathrm{B}(2;0)$ un point appartenant à l'autre courbe.



a) Identifier chaque courbe sur le graphique. Justifier.

b) En déduire la convexité de la fonction f et préciser les abscisses des éventuels points d'inflexion.

Auto-évaluation : .....

Contrôle sur la convexité – CORRIGE – M. Quet

Exercice 1

6 pts (1-1-1-1-1-1)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[2;8]$ par : $f(x)=\dfrac{-x^2+10x-16}{x^2}$.

On appelle (C) sa courbe représentative dans un repère.

1. ***a)*** *Montrer que pour tout réel de l'intervalle $[2;8]$, on a : $f'(x)=\dfrac{-10x+32}{x^3}$*

$$f'(x)=\frac{(-2x+10)\times x^2-(-x^2+10x-16)\times 2x}{(x^2)^2}=\frac{-2x^3+10x^2-(-2x^3+20x^2-32x)}{x^4}$$

$$=\frac{-2x^3+10x^2+2x^3-20x^2+32x}{x^4}=\frac{-10x^2+32x}{x^4}=\frac{x(-10x+32)}{x^4}=\frac{-10x+32}{x^3}$$

b) *Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[2;8]$.*

$\forall x\in[2;8]\ :\ x^3>0$

$$-10x+32>0 \iff -10x>-32 \iff x<\frac{-32}{-10} \iff x<3,2$$

Si $x<3,2$: $f'(x)>0$ et si $x>3,2$: $f'(x)<0$

c) *En déduire le tableau de variations de f sur l'intervalle $[2;8]$.*

x	2		$3,2$		8
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$0,5625$	$\searrow$	0

$\rightarrow f(2)=f(8)=0$ et $f(3,2)=0,5625$

2. *On appelle f'' la dérivée seconde de f sur $[2;8]$.*

a) *Montrer que pour tout réel de l'intervalle $[2;8]$, on a : $f''(x)=\dfrac{20x-96}{x^4}$.*

$$f''(x)=\frac{-10\times x^3-(-10x+32)\times 3x^2}{(x^3)^2}=\frac{-10x^3-(-30x^3+96x^2)}{x^6}=\frac{-10x^3+30x^3-96x^2}{x^6}$$

$$=\frac{20x^3-96x^2}{x^6}=\frac{(20x-96)x^2}{x^6}=\frac{20x-96}{x^4}$$

b) *Etudier la convexité de f sur $[2;8]$.*

$\forall x\in[2;8]\ :\ x^4>0$

$$20x-96>0 \iff 20x>96 \iff x>\frac{96}{20} \iff x>4,8$$

Si $x>4,8$: $f''(x)>0$ et la fonction f est convexe.

Si $x<4,8$: $f''(x)<0$ et la fonction f est concave.

c) *La courbe (C) possède-t-elle des points d'inflexion ? Si oui, déterminer leurs coordonnées.*

La dérivée seconde s'annule en changeant de signe en $4,8$ donc la courbe (C) admet un point d'inflexion de coordonnées $(4,8;f(4,8))$ soit : $\left(4,8;\dfrac{7}{18}\right)$.

Exercice 2

10 pts (2-1,5-1-1,5-1-2-1)

1) *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(3-2x)e^{2x}+1$.*

a) *Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.*

$$f'(x)=-2\times e^{2x}+(3-2x)\times 2e^{2x}=e^{2x}\left[-2+2(3-2x)\right]=e^{2x}\left[-2+6-4x\right]=(4-4x)e^{2x}$$

$$f''(x)=-4\times e^{2x}+(4-4x)\times 2e^{2x}=e^{2x}\left[-4+2(4-4x)\right]=e^{2x}\left[-4+8-8x\right]=(4-8x)e^{2x}$$

b) *Etudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variation.*

$\forall x\in\mathbb{R}\ :\ e^{2x}>0$

$$4-4x>0 \iff -4x>-4 \iff x<\frac{-4}{-4} \iff x<1$$

Si $x<1$: $f'(x)>0$ et la fonction f est strictement croissante.

Si $x>1$: $f'(x)<0$ et la fonction f est strictement décroissante.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		↗	$8,39$	↘	

→ $f(1)\simeq 8,39$

c) *Etudier la convexité de la fonction f.*

$\forall x\in\mathbb{R}\ :\ e^{2x}>0$

$$4-8x>0 \iff -8x>-4 \iff x<\frac{-4}{-8} \iff x<\frac{1}{2}$$

Si $x<\frac{1}{2}$: $f''(x)>0$ et la fonction f est convexe.

Si $x>\frac{1}{2}$: $f''(x)<0$ et la fonction f est concave.

2) *Soit g la fonction définie sur $[-1;4]$ par $g(x)=-x^3+3x^2-1$.*

a) *Etudier les variations de la fonction g et dresser son tableau de variation.*

$$g'(x)=-3x^2+6x=3x(-x+2)$$

$$-x+2>0 \iff 2>x$$

D'après le tableau de signes ci-dessous :

si $x\in[0;2]$: $g'(x)>0$ et la fonction g est strictement croissante.

si $x\in[-1;0]\cup[2;4]$: $g'(x)<0$ et la fonction g est strictement décroissante.

x	-1		0		2		4
$3x$		$-$	0	$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
g	3	↘	-1	↗	3	↘	-17

b) *Déterminer une équation de la tangente en 1 à la courbe C_g.*

$$y=g'(1)(x-1)+g(1)$$

avec : $g(1)=1$ et $g'(1)=3\times 1(-1+2)=3$

L'équation de la tangente est :

$$y=3(x-1)+1=3x-3+1=3x-2$$

c) *Etudier la convexité de g et déterminer les éventuels points d'inflexion de la courbe.*

$$g''(x) = -6x + 6 = 6(1-x)$$

$$1 - x > 0 \iff 1 > x$$

Si $x < 1$: $g''(x) > 0$ et la fonction g est convexe.

Si $x > 1$: $g''(x) < 0$ et la fonction g est concave.

Au point d'abscisse $x = 1$, la dérivée seconde s'annule en changeant de signe. La courbe représentant la fonction g admet un point d'inflexion de coordonnées $(1; g(1))$ soit $(1;1)$.

d) *En déduire le signe de la fonction h définie sur $[-1;4]$ par $h(x) = g(x) - (3x-2)$.*

On reconnait l'équation de la tangente au point d'abscisse $x = 1$ obtenue à la question 2).

Sur l'intervalle $[1;4]$, la fonction g est concave, donc sa courbe représentative est située sous ses tangentes, ainsi : $g(x) < (3x-2)$, et $h(x) < 0$.

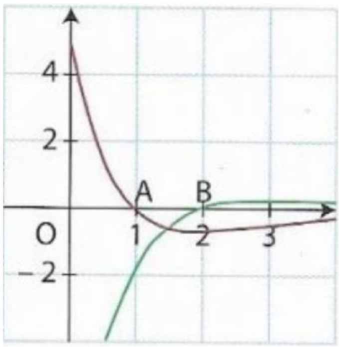
Sur l'intervalle $[-1;1]$, la fonction g est convexe, donc sa courbe représentative est située au-dessus ses tangentes, ainsi : $g(x) > (3x-2)$, et $h(x) > 0$.

Exercice 3 :

4 pts (2-2)

f est une fonction deux fois dérivable sur $[0;4]$. Voici la courbe représentative C' de sa fonction dérivée f' et la courbe représentative C'' de sa fonction dérivée seconde f''.

$\mathrm{A}(1;0)$ *est un point appartenant à l'une de ces deux courbes et* $\mathrm{B}(2;0)$ *un point appartenant à l'autre courbe.*



a) *Identifier chaque courbe sur le graphique. Justifier.*

La courbe verte est négative sur l'intervalle $[0;2]$, ce qui correspond exactement à la décroissance de la courbe rouge.

La courbe verte est positive sur l'intervalle $[2;4]$, ce qui correspond exactement à la croissance de la courbe rouge.

Ainsi : la courbe C'' est verte et la courbe C' est rouge.

b) *En déduire la convexité de la fonction f et préciser les abscisses des éventuels points d'inflexion.*

Sur l'intervalle $[0;2]$, la courbe C'' est négative, donc la fonction est concave.

Sur l'intervalle $[2;4]$, la courbe C'' est positive, donc la fonction est convexe.