Term. Spécialité Math **Notre Dame de La Merci** 2021

Contrôle sur la dérivation et la convexité

Exercice 1 : / 4 pts

Dériver les fonctions suivantes :

a) $f(x)=\left(1+x-3x^2\right)e^{2-4x^3}$ b) $g(x)=\left(\dfrac{\sqrt{4x^2+3}}{5x-2}\right)^3$

Exercice 2 : / 5 pts

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^4-3x^3-10x^2+6x-1$

1) Etudier la convexité de la fonction f sur $I=\mathbb{R}$.
2) Existe-t-il des points d'inflexion ? Justifiez soigneusement votre réponse.
3) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point s'abscisse 1.

Exercice 3 : / 5 pts

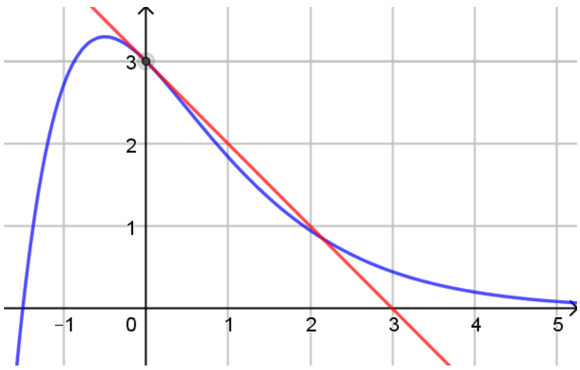
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[2;8]$ par :

$$f(x)=\frac{-x^2+10x-16}{x^2}.$$

On appelle (C) sa courbe représentative dans un repère.

1. Déterminer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[2;8]$ puis étudier les variations de f.
2. Déterminer la dérivée seconde de la fonction f sur l'intervalle $[2;8]$ puis étudier la convexité de f.
3. La fonction f admet-elle des points d'inflexion ? Quelles sont leurs coordonnées ?

Exercice 4 : / 6 pts



La courbe C ci-contre représente dans un repère orthonormal une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=(ax+b)e^{-x}.$$

1) a. Déterminer par lecture graphique $f(0)$.

   b. Déterminer par lecture graphique $f'(0)$.

   c. Pensez-vous que cette fonction semble convexe sur $[0;6]$?

2) a. Exprimer la fonction dérivée f' en fonction de a et b.

   b. A l'aide des résultats des questions précédentes, déterminer les valeurs de a et b.

   c. Calculer alors f''.

   d. Indiquer alors sur quel intervalle de $\mathbb{R}$ f est convexe et celui sur lequel elle est concave. Déterminer le point d'inflexion de la courbe et une équation de la tangente en ce point.

Auto-évaluation : .....

Contrôle sur la dérivation et la convexité – CORRIGE – M. Quet

Exercice 1: *Dériver les fonctions suivantes* / 5 pts

a) $f(x)=\left(1+x-3x^2\right)e^{2-4x^3}$ on pose : $u(x)=1+x-3x^2$ et $v(x)=e^{2-4x^3}$

donc : $u'(x)=1-6x$ et $v'(x)=-12x^2e^{2-4x^3}$

$$f'(x)=(1-6x)e^{2-4x^3}+\left(1+x-3x^2\right)\times\left(-12x^2e^{2-4x^3}\right)$$
$$=\left[(1-6x)-\left(1+x-3x^2\right)\times 12x^2\right]e^{2-4x^3}$$
$$=\left[1-6x-12x^2-12x^3+36x^4\right]e^{2-4x^3}$$
$$=\left(36x^4-12x^3-12x^2-6x+1\right)e^{2-4x^3}$$

b) $g(x)=\left(\dfrac{\sqrt{4x^2+3}}{5x-2}\right)^3$ on pose : $u(x)=\sqrt{4x^2+3}$ et $v(x)=5x-2$

donc : $u'(x)=\dfrac{8x}{2\sqrt{4x^2+3}}=\dfrac{4x}{\sqrt{4x^2+3}}$ et $v'(x)=5$

On pose $U(x)=\dfrac{\sqrt{4x^2+3}}{5x-2}$, ainsi :

$$U'(x)=\frac{\dfrac{4x}{\sqrt{4x^2+3}}\times(5x-2)-\sqrt{4x^2+3}\times 5}{(5x-2)^2}=\frac{\dfrac{4x(5x-2)}{\sqrt{4x^2+3}}-5\sqrt{4x^2+3}\times\dfrac{\sqrt{4x^2+3}}{\sqrt{4x^2+3}}}{(5x-2)^2}$$

$$=\frac{\dfrac{4x(5x-2)}{\sqrt{4x^2+3}}-\dfrac{5\left(4x^2+3\right)}{\sqrt{4x^2+3}}}{(5x-2)^2}=\frac{20x^2-8x-20x^2-15}{(5x-2)^2\times\sqrt{4x^2+3}}=\frac{-8x-15}{(5x-2)^2\times\sqrt{4x^2+3}}$$

On obtient :

$$g'(x)=3\left(\frac{\sqrt{4x^2+3}}{5x-2}\right)^2\times\frac{-8x-15}{(5x-2)^2\times\sqrt{4x^2+3}}=\frac{-3(8x+15)}{(5x-2)^2\times\sqrt{4x^2+3}}\left(\frac{\sqrt{4x^2+3}}{5x-2}\right)^2$$

Exercice 2 : / 6 pts

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^4-3x^3-10x^2+6x-1$

1) *Etudier la convexité de la fonction f sur $I=\mathbb{R}$.*

La fonction f est dérivable en tant que fonction polynômiale. Pour tout réel x :

$$f'(x)=4x^3-9x^2-20x+6$$
$$f''(x)=12x^2-18x-20=2\left(6x^2-9x-10\right)$$

Etude du signe de $6x^2-9x-10$:

$\Delta=(-9)^2-4\times6\times(-10)=81+240=321$ → $\Delta>0$ donc deux racines :

$x_1=\dfrac{-(-9)-\sqrt{321}}{2\times6}=\dfrac{9-\sqrt{321}}{12}$ et $x_2=\dfrac{-(-9)+\sqrt{321}}{2\times6}=\dfrac{9+\sqrt{321}}{12}$

$a=6$ donc la parabole représentant $6x^2-9x-10$ est orientée vers le haut :

Si $x \in \left]-\infty ; \frac{9-\sqrt{321}}{12}\right[\cup \left]\frac{9+\sqrt{321}}{12};+\infty\right[$: $f''(x)>0$ et la fonction f est convexe ;

Si $x \in \left]\frac{9-\sqrt{321}}{12};\frac{9+\sqrt{321}}{12}\right[$: $f''(x)<0$ et la fonction f est concave.

2) *Existe-t-il des points d'inflexion ? Justifiez soigneusement votre réponse.*
La dérivée s'annule deux fois en changeant de signe, elle possède deux points d'inflexion.

3) *Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 1.*
L'équation de cette tangente est :

$$y = f'(1)\times(x-1)+f(1)$$

Or : $f(1)=1^4-3\times1^3-10\times1^2+6\times1-1=1-3-10+6-1=-7$

$f'(1)=4\times1^3-9\times1^2-20\times1+6=4-9-20+6=-19$

Ainsi : $y=-19(x-1)-7=-19x+19-7=-19x+12$

Exercice 3 :

/ 5 pts

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[2;8]$ par : $f(x)=\frac{-x^2+10x-16}{x^2}$.

On appelle (C) sa courbe représentative dans un repère.

1. *Déterminer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[2;8]$ puis étudier les variations de f.*

$$f'(x)=\frac{(-2x+10)\times x^2-(-x^2+10x-16)\times 2x}{(x^2)^2}=\frac{x\times\left[x(-2x+10)-(-2x^2+20x-32)\right]}{x^4}$$

$$=\frac{-2x^2+10x+2x^2-20x+32}{x^3}=\frac{-10x+32}{x^3}$$

$\forall x\in[2;8]$: $x^3>0$

$-10x+32>0 \Leftrightarrow -10x>-32 \Leftrightarrow \frac{-10x}{-10}<\frac{-32}{-10} \Leftrightarrow x<3,2$

Si $x\in[2;3,2]$: $f'(x)>0$ et la fonction est croissante.

Si $x\in[3,2;8]$: $f'(x)<0$ et la fonction est décroissante.

2. *Déterminer la dérivée seconde de la fonction f sur l'intervalle $[2;8]$ puis étudier la convexité de f*

$$f''(x)=\frac{-10\times x^3-(-10x+32)\times 3x^2}{(x^3)^2}=\frac{x^2\left[-10x-(-30x+96)\right]}{x^6}=\frac{-10x+30x-96}{x^4}$$

$$=\frac{20x-96}{x^4}$$

$\forall x\in[2;8]$: $x^4>0$

$20x-96>0 \Leftrightarrow 20x>96 \Leftrightarrow x>\frac{96}{20} \Leftrightarrow x>4,8$

Si $x \in [2;4{,}8]$: $f''(x) > 0$ et la fonction est convexe.

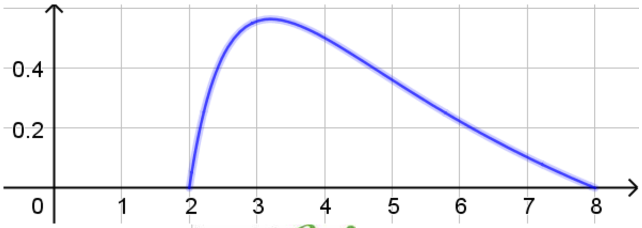
Si $x \in [4{,}8;8]$: $f''(x) < 0$ et la fonction est concave.

3. *La fonction f admet-elle des points d'inflexion ? Quelles sont leurs coordonnées ?*

La dérivée seconde s'annule une fois en changeant de signe, la courbe représentant la fonction f possède un point d'inflexion d'abscisse 4,8.

$$f(4{,}8) = \frac{7}{18}$$

Ses coordonnées sont : $\left(4{,}8;\frac{7}{18}\right)$.



Exercice 4 : / 6 pts

La courbe C ci-contre représente dans un repère orthonormal une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (ax+b)e^{-x}.$$

1) a. *Déterminer par lecture graphique $f(0)$.*

$f(0) = 3$

b. *Déterminer par lecture graphique $f'(0)$.*

$f'(0) = -1$

c. *Pensez-vous que cette fonction semble convexe sur $[0;6]$?*

La courbe C en zéro est en-dessous de sa tangente, elle est concave.

2) a. *Exprimer la fonction dérivée f' en fonction de a et b.*

$$f'(x) = a \times e^{-x} + (ax+b)(-e^{-x}) = [a-(ax+b)]e^{-x} = (a-ax-b)e^{-x} = (-ax+a-b)e^{-x}$$

b. *A l'aide des résultats des questions précédentes, déterminer les valeurs de a et b .*

La relation $f(0) = 3$ donne :

$$(a \times 0 + b)e^{-0} = 3 \iff b = 3$$

La relation $f'(0) = -1$ donne :

$$(-a \times 0 + a - b)e^{-0} = -1 \iff a - b = -1 \iff a = -1 + b = -1 + 3 = 2$$

c. *Calculer alors f ''.*

La fonction f est définie comme suit :

$$f(x) = (2x+3)e^{-x}$$

La dérivée a déjà été calculée, on obtient :

$$f'(x) = (-2x+2-3)e^{-x} = (-2x-1)e^{-x}$$

Calcul de la dérivée seconde :

$$f''(x) = -2e^{-x} + (-2x-1)\times(-e^{-x}) = [-2-(-2x-1)]\times e^{-x} = (2x-1)e^{-x}$$

d. *Indiquer alors sur quel intervalle de $\mathbb{R}$ f est convexe et celui sur lequel elle est concave.*
Déterminer le point d'inflexion de la courbe et une équation de la tangente en ce point.

$$\forall x \in \mathbb{R} : e^{-x} > 0$$

$$2x-1>0 \;\Leftrightarrow\; 2x>1 \;\Leftrightarrow\; x>\frac{1}{2}$$

Si $x>\frac{1}{2}$: $f''(x)>0$ et la fonction est convexe.

Si $x<\frac{1}{2}$: $f''(x)<0$ et la fonction est concave.

La dérivée seconde s'annule une fois en changeant de signe, la courbe représentant la fonction f possède un point d'inflexion d'abscisse $\frac{1}{2}$.

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(2\times\frac{1}{2}+3\right)e^{-\frac{1}{2}}=4e^{-\frac{1}{2}}.$$

Les coordonnées du point d'inflexion sont $\left(\frac{1}{2};4e^{-\frac{1}{2}}\right)$.

L'équation de cette tangente est :

$$y=f'\left(\frac{1}{2}\right)\times\left(x-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)$$

Or : $f\left(\frac{1}{2}\right)=4e^{-\frac{1}{2}}$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right)=\left(-2\times\frac{1}{2}-1\right)e^{-\frac{1}{2}}=-2e^{-\frac{1}{2}}$$

Ainsi : $y=-2e^{-\frac{1}{2}}\times\left(x-\frac{1}{2}\right)+4e^{-\frac{1}{2}}=-2e^{-\frac{1}{2}}\times x+e^{-\frac{1}{2}}+4e^{-\frac{1}{2}}=-2e^{-\frac{1}{2}}\times x+5e^{-\frac{1}{2}}$